Труды МАИ. 2025. № 144
Trudy MAI. 2025. No. 144. (In Russ.)

МЕХАНИКА

Научная статья
УДК 531.01; 531.36; 531.131
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=185683
EDN: https://www.elibrary.ru/KWFLWS

ОБ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МАЯТНИКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ РЕЗОНАНСЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ ВЫРОЖДЕНИЯ

Бадма Александрович Максимов

Московский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский Университет)

Москва, Россия

badmamaksimov1@gmail.com

Аннотация. Рассматривается движение тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой в однородном поле тяжести. Предполагается, что главные моменты инерции тела для неподвижной точки удовлетворяют условию Д.Н. Горячева – С.А. Чаплыгина, т. е. находятся в отношении $A = C = 4B$. В отличие от интегрируемого случая Д.Н. Горячева – С.А. Чаплыгина никаких дополнительных ограничений на положение центра масс тела не накладывается. В рассматриваемом случае возможны маятниковые колебания тела относительно главной оси, расположенной в экваториальной плоскости эллипсоида инерции.

Целью данной работы является решение задачи об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний тела в неисследованных ранее случаях, отвечающих резонансу четвертого порядка при наличии вырождения, когда для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости необходимо провести анализ до членов шестого порядка включительно в разложении функции Гамильтона в окрестности невозмущенного периодического движения. Изучение резонансных случаев представляет как теоретический интерес, так и имеет важное значение для приложений, поскольку позволяет выявить значения параметров, при которых происходит качественное изменение характера движения систем. Исследование выполнено на основании метода нормальных форм и теории КАМ. Это позволило получить строгие выводы об орбитальной неустойчивости, а также выводы об орбитальной устойчивости на уровне энергии, отвечающем невозмущенной орбите. Результаты исследования представлены в таблице и проиллюстрированы на диаграмме устойчивости.

***Ключевые слова*:** маятниковые колебания, орбитальная устойчивость, случай Д.Н. Горячева – С.А. Чаплыгина, резонанс четвертого порядка, локальные переменные, гамильтоновы системы.

Для цитирования: Максимов Б.А. Об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний тяжелого твердого тела при резонансе четвертого порядка в случае вырождения // Труды МАИ. 2025. № 144. URL: https://trudymai.ru/publications.php?ID=185683

MECHANICS

Original article

ON THE ORBITAL STABILITY OF PENDULUM OSCILLATIONS OF A HEAVY RIGID BODY AT FOURTH-ORDER RESONANCE IN THE CASE OF DEGENERACY

Badma A. Maksimov

Moscow Aviation Institute (National Research University)

Moscow, Russia

badmamaksimov1@gmail.com

ORCID: 0000-0003-2754-5038

Abstract. The motion of a heavy rigid body with a fixed point in a uniform gravitational field is considered. It is assumed that the principal moments of inertia of the body for the fixed point satisfy the D.N. Goryachev – S.A. Chaplygin condition, i.e. are in the ratio $A = C = 4B$. Unlike the integrable case of D.N. Goryachev – S.A. Chaplygin, no additional restrictions are imposed on the position of the center of mass of the body. In the case under consideration, pendulum oscillations of the body relative to the main axis located in the equatorial plane of the ellipsoid of inertia are possible.

The aim of this work is to solve the problem of orbital stability of pendulum oscillations of a body in previously unexplored cases corresponding to fourth-order resonance in the presence of degeneracy, when to obtain rigorous conclusions about orbital stability it is necessary to conduct an analysis up to sixth-order terms inclusive in the expansion of the Hamiltonian function in the neighborhood of unperturbed periodic motion. The study of resonance cases is of both theoretical interest and is important for applications, since it allows us to identify the parameter values at which a qualitative change in the nature of the motion of systems occurs. The study is based on the method of normal forms and the KAM theory. This made it possible to obtain rigorous conclusions about orbital instability, as well as conclusions about orbital stability at the energy level corresponding to the unperturbed orbit. The results of the study are presented in the table and illustrated in the stability diagram.

Keywords: pendulum oscillations, orbital stability, the case of D.N. Goryachev – S.A. Chaplygin, fourth-order resonance, local variables, Hamiltonian systems.

For citation: Maksimov B.A. On the orbital stability of pendulum oscillations of a heavy rigid body at fourth-order resonance in the case of degeneracy // Trudy MAI. 2025. No. 144. (In Russ.) https://trudymai.ru/publications.php?ID=185683

Введение

Изучение периодических движений в динамике твердого тела имеет как теоретический интерес для развития общих методов классической механики, так и представляет важное прикладное значение для построения адекватных математических моделей современных технических систем. В частности, результаты таких исследований могут быть использованы для создания систем пассивной стабилизации и ориентации спутника посредством сил гравитационного и магнитного взаимодействия. Одной из наиболее важных проблем, возникающих при изучении периодических движений, является задача об их устойчивости. Периодические движения твердого тела в потенциальном поле сил, как правило, неустойчивы по Ляпунову. Однако набольший интерес для приложений представляет изучение их орбитальной устойчивости.

Важным типом периодических движений твердого тела являются его маятниковые движения, при которых твердое тело совершает колебания или вращения относительно своей главной оси, описываемые уравнением математического маятника. Исследованию орбитальной устойчивости маятниковых движений твердого тела посвящено много работ [1-15]. Несмотря на это, здесь остается еще много открытых вопросов.

Уравнения движения тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой могут быть представлены в виде канонических уравнений Гамильтона. Это обстоятельство позволяет применять методы теории КАМ для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости периодических движений.

Наиболее общий подход к исследованию орбитальной устойчивости периодических движений основан на использовании метода нормальных форм и теории КАМ. Идея этого метода заключается в приведении гамильтониана уравнений движения к наиболее удобному (нормальному) виду для дальнейшего анализа, позволяющему использовать известные критерии устойчивости, полученные в рамках теории КАМ.

В последние годы получен ряд важных результатов об устойчивости маятниковых периодических движений тяжёлого твёрдого тела с одной неподвижной точкой. В случае С.В. Ковалевской устойчивость маятниковых колебаний на основе различных подходов рассматривалась в [1-5]. Случай Д.Н. Горячева – С.А. Чаплыгина изучался в [6-8]. Случай Д.К. Бобылёва – В.А. Стеклова рассматривался в [9-11]. Для динамически симметричного твёрдого тела исследовался случай, когда центр масс тела лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции [12]. В [13] рассмотрен частный случай динамически симметричного тела в предположении, что центр масс не лежит в экваториальной плоскости, а главные моменты инерции тела в неподвижной точке относятся как $A = C = 2B$.

В [14,15] рассмотрен случай, когда главные моменты инерции тела связаны равенствами $A = C = 4B$. В [14] на основе анализа линейной системы было показано, что маятниковые вращения всегда орбитально неустойчивы, а маятниковые колебания в зависимости от значений параметров могут быть как орбитально устойчивыми в линейном приближении, так и орбитально неустойчивыми. В [15] были получены строгие выводы об орбитальной устойчивости для большинства значений параметров. Исключение составляют лишь 15 резонансных точек, для которых необходимы дополнительные исследования. Эти точки отвечают резонансам первого, второго, третьего, четвертого и шестого порядков.

Резонансы играют важную роль в изучении общего характера движения механической системы. В частности, наличие резонансов может приводить к неустойчивости механической системы. Поэтому с практической точки зрения важно знать значения параметров, при которых система выходит на резонансы. В данной работе решается задача орбитальной устойчивости при наличии резонанса четвертого порядка. При этом рассматривается наиболее трудный для анализа и неисследованный ранее случай, когда вопрос об устойчивости не решается членами четвертого порядка и для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости необходимо провести анализ до шестой степени включительно в разложении функции Гамильтона в окрестности невозмущенного периодического движения.

Постановка задачи

Рассмотрим движение твёрдого тела массой m вокруг неподвижной точки O в однородном поле тяжести. Введем неподвижную систему координат $OXYZ$, ось OZ которой направлена вертикально вверх, и подвижную систему координат $Oxyz$, жестко связанную с телом, оси которой направлены по главным осям инерции тела для точки O. Будем предполагать, что главные моменты инерции A, B, C тела для неподвижной точки O удовлетворяют равенству $A = C = 4B$. Никаких ограничений на положение центра масс не накладывается. В силу динамической симметрии тела направления осей Ox, Oz можно выбрать так, что центр масс тела будет лежать в плоскости Oxy. При таком выборе осей положение центра масс тела будет определяться расстоянием до начала координат, которое будем обозначать l, и углом α между радиусом-вектором центра масс и положительным направлением оси Ox. Без ограничения общности, можно считать, что $0 \le \alpha \le \pi/2$. Отметим, что при $\alpha = 0$ имеет место случай интегрируемости Д.Н. Горячева – С.А. Чаплыгина, а при $\alpha = \pi/2$ – случай Лагранжа с дополнительным ограничением на моменты инерции.

Положение твёрдого тела в пространстве будем задавать при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ. Обозначим через $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$ импульсы, соответствующие углам Эйлера. Угол ψ является циклической координатой, поэтому $p_\psi = const$. Положим $p_\psi = 0$. Более того введем безразмерные переменные по формулам

$$q_1 = \varphi + \alpha - \frac{3\pi}{2}, \qquad q_2 = \theta - \frac{\pi}{2}, \qquad p_1 = \frac{p_\varphi}{C\mu}, \qquad p_2 = \frac{p_\theta}{C\mu}, \qquad (2.3)$$
$$\tau = \mu t, \qquad \mu^2 = mgl/C.$$

В новых переменных гамильтониан задачи принимает вид

$$H = \frac{1}{2}\left(p_2 \sin(q_1 - \alpha) - p_1 \operatorname{tg} q_2 \cos(q_1 - \alpha)\right)^2 + \frac{1}{2} p_1^2 + \\ + 2\left(p_2 \cos(q_1 - \alpha) + p_1 \operatorname{tg} q_2 \sin(q_1 - \alpha)\right)^2 - \cos q_2 \cos q_1. \qquad (2.4)$$

На маятниковых движениях твёрдого тела выполняется равенство $q_2 = p_2 = 0$, а эволюция переменных q_1, p_1 описывается канонической системой с гамильтонианом

$$H_0 = \frac{1}{2} p_1^2 - \cos q_1. \qquad (2.5)$$

Характер маятниковых движений зависит от величины константы интеграла энергии $H_0 = h$: при $|h| < 1$ тело совершает маятниковые колебания, а при $|h| > 1$ тело совершает маятниковые вращения относительно своей оси Oz.

В рассматриваемой задаче имеется два параметра. Первый параметр — это угол α между радиусом-вектором центра масс и экваториальной плоскостью эллипсоида инерции, соответствующий геометрии тела. Второй параметр — это постоянная энергии h, которая параметризует семейство периодических решений. Как уже было упомянуто выше, маятниковые вращения орбитально неустойчивы при всех значениях параметров, а маятниковые колебания могут быть как орбитально устойчивыми, так и орбитально неустойчивыми. Подробный линейный и нелинейный анализ орбитальной устойчивости был выполнен в [14,15]. В частности, были построены области параметрического резонанса, в которых наблюдается орбитальная неустойчивость. Вне областей параметрического резонанса был проведен строгий нелинейный анализ, включающий случаи резонанса до четвертого порядка.

Опишем кратко результаты анализа орбитальной устойчивости маятниковых колебаний, полученные в [15]. На рисунке 1 представлена диаграмма орбитальной устойчивости в плоскости параметров h, α. Области неустойчивости отмечены серым цветом. Вне этих областей маятниковые колебания устойчивы в линейном приближении. Кривые, соответствующие резонансу четвертого порядка, обозначены как γ_1, γ_2 и выделены пунктирной линией.

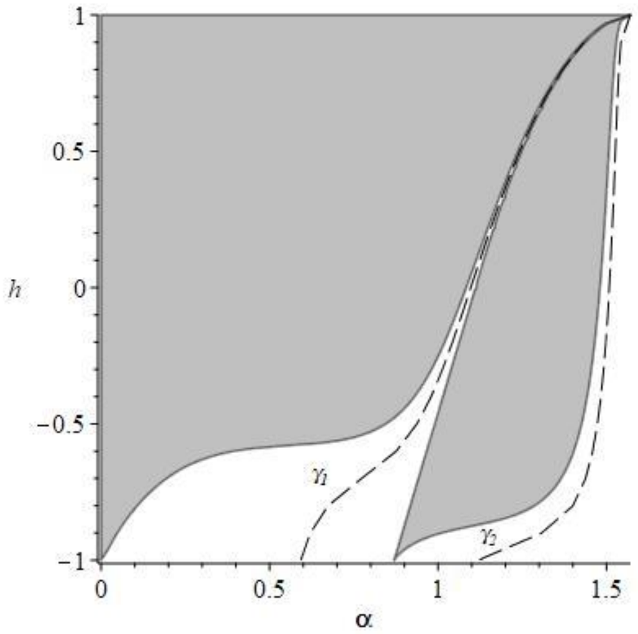

Рис. 1. Диаграмма орбитальной устойчивости

Вне кривых резонанса четвёртого порядка γ_1, γ_2 маятниковые колебания орбитально устойчивы в строго нелинейном смысле. Исключение составляют лишь небольшие участки кривых γ_1, γ_2(рис. 2).

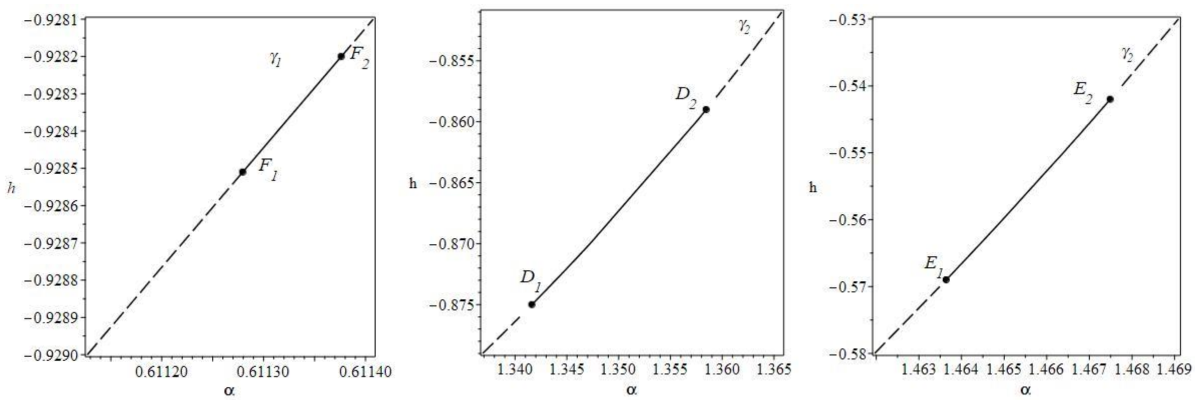

Рис 2. Области неустойчивости резонансных кривых γ_1, γ_2.

На этих участках маятниковые колебания орбитально неустойчивы. В концевых точках этих участках $F_i, E_i, D_i, i = 1{,}2$, которые соответствуют случаю вырождения, когда вопрос об орбитальной устойчивости не решается членами четвёртой степени в разложении функции Гамильтона в ряд в окрестности исследуемого периодического решения и необходимо учитывать члены не ниже шестой степени. Координаты этих точек приведены в таблице 1.

Таблица 1. Координаты граничных точек сегментов неустойчивости на кривых резонансов четвертого порядка.

	Точка F_1	Точка F_2	Точка D_1	Точка D_2	Точка E_1	Точка E_2
α	0.6112	0.6113	1.3406	1.3593	1.4636	1.4675
h	-0.9285	-0.9282	-0.8758	-0.8580	-0.5695	-0.5415

Целью данной работы является получение строгих выводов об орбитальной устойчивости в неизученных ранее случаях вырождения. Решение этой задачи позволяет полностью закрыть вопрос об орбитальной устойчивости маятниковых движений для твердого тела с рассматриваемой в данной статье геометрией масс в случае резонанса четвертого порядка.

Локальные переменные и изоэнергетическая редукция

В этом разделе вводятся так называемые локальные переменные в окрестности периодического решения, описывающего маятниковые колебания. Также проводится изоэнергетическая редукция на нулевом уровне энергии. Это позволяет свести задачу орбитальной устойчивости к задаче устойчивости положения равновесия так называемой редуцированной системы, описывающей движение на нулевом уровне энергии.

Следуя методике работы [7], введем в окрестности невозмущённого периодического движения локальные координаты по формулам

$$
\begin{gathered}
q_1 = f(\xi) + \frac{\sin f(\xi)}{V^2(\xi)}\eta - \frac{\sin f(\xi)}{2V^4(\xi)}\eta^2 + \left[\frac{\sin f(\xi)\left(\cos f(\xi) + \left(g(\xi)\right)^2\right)}{6V^6(\xi)} + \right. \\
\left. + \frac{\left(g(\xi)\cos^2 f(\xi) + \sin^2 f(\xi)\right)\sin f(\xi)}{3V^8(\xi)}\right]\eta^3 + O\left(\eta^4\right), \\
p_1 = g(\xi) + \frac{g(\xi)}{V^2(\xi)}\eta - \frac{g(\xi)\cos f(\xi)}{2V^4(\xi)}\eta^2 + \left[\frac{g(\xi)\cos f(\xi)}{6V^6(\xi)} + \right. \\
\left. + \frac{\left(g(\xi)\cos^2 f(\xi) + \sin^2 f(\xi)\right)g(\xi)}{3V^8(\xi)}\right]\eta^3 + O\left(\eta^4\right),
\end{gathered} \tag{3.1}
$$

где $V^2(\xi) = g^2(\xi) + \sin^2 f(\xi)$, $f(\xi) = q_{1*}(\xi)$, $g(\xi) = p_{1*}(\xi)$. Здесь функции $q_{1*}(\xi), p_{1*}(\xi)$ представляют собой общее решение, описывающее маятниковые колебания, и определяются соотношениями

$$
\begin{gathered}
q_{1*}(\tau + \tau_0) = 2\arcsin\left(k\,sn\left(\tau + \tau_0, k\right)\right), \quad p_{1*}(\tau + \tau_0) = 2k\,cn\left(\tau + \tau_0, k\right), \\
k^2 = \frac{h+1}{2}.
\end{gathered} \tag{3.2}
$$

Период колебаний вычисляется по формуле

$$
T = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad \omega = \frac{\pi}{2K(k)}. \tag{3.3}
$$

В (3.2) – (3.3) используются общепринятые обозначения для эллиптических функций и интегралов.

В новых переменных функция Гамильтона периодически зависит от ξ и является аналитической функцией переменной η. Аналогично работе [15] выполним ещё одну каноническую замену перемененных по формулам

$$\xi = \frac{1}{\omega} w, \qquad \eta = \omega\zeta \tag{3.4}$$

и разложим функцию Гамильтона в окрестности $q_2 = p_2 = \eta = 0$

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_6 ..., \tag{3.5}$$

где

$$\begin{aligned}
&\Gamma_2 = \omega\zeta + \Phi_{20}(q_2, p_2, w), \\
&\Gamma_4 = \omega^2 \chi(w)\zeta^2 + \omega\zeta\Phi_{22}(q_2, p_2, w) + \Phi_{40}(q_2, p_2, w), \\
&\Gamma_6 = \chi_6(w)\zeta^3 + \Phi_{24}(q_2, p_2, w)\zeta^2 + \Phi_{42}(q_2, p_2, w)\zeta + \Phi_{60}(q_2, p_2, w), \\
&\Phi_{mn}(q_2, p_2, w) = \sum_{i+j=m} \varphi_{ij}^{(n)} q_2^i p_2^j.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Коэффициенты форм Γ_2, Γ_4 в (3.6) являются 2π-периодическими функциями переменной w и имеют следующий вид [15]

$$\begin{gathered}
\chi(w) = -\frac{(\cos q_{1*} - 1)(\cos^2 q_{1*} + p_{1*}^2 - 1)}{2(\cos^2 q_{1*} - p_{1*}^2 - 1)^2}, \\
\varphi_{20}^{(0)} = \frac{-3g^2 \cos(2q_{1*} - 2\alpha) + 2\cos q_{1*} + 5p_{1*}^2}{4}, \\
\varphi_{11}^{(0)} = \frac{3p_{1*} \sin(2q_{1*} - 2\alpha)}{2}, \qquad \varphi_{02}^{(0)} = \frac{3\cos(2q_{1*} - 2\alpha) + 5}{4}
\end{gathered} \tag{3.7}$$

$$\varphi_{20}^{(2)} = \frac{6\cos\left(2q_{1*} - 2\alpha\right) p_{1*}^2 - 3p_{1*}^2 \cos\left(q_{1*} - 2\alpha\right) + 3p_{1*}^2 \cos\left(3q_{1*} - 2\alpha\right) -}{-4p_{1*}^2 + 2\cos 2q_{1*} - 2}$$

$$\frac{-10p_{1*}^2 - \cos 2q_{1*} + 1}{-4p_{1*}^2 + 2\cos 2q_{1*} - 2},$$

$$\varphi_{11}^{(2)} = \frac{3p_{1*}\sin\left(2q_{1*} - 2\alpha\right) + 3p_{1*}\sin\left(3q_{1*} - 2\alpha\right) - 3p_{1*}\sin\left(q_{1*} - 2\alpha\right)}{2p_{1*}^2 - \cos 2q_{1*} + 1},$$

$$\varphi_{02}^{(2)} = \frac{3\cos\left(q_{1*} - 2\alpha\right) - 3\cos\left(3q_{1*} - 2\alpha\right)}{-4p_{1*}^2 + 2\cos 2q_{1*} - 2},$$

$$\varphi_{40}^{(0)} = \frac{-12g^2\cos\left(2q_{1*} - 2\alpha\right) - \cos q_{1*} + 20p_{1*}^2}{24},$$

$$\varphi_{31}^{(0)} = \frac{p_{1*}\sin\left(2q_{1*} - 2\alpha\right)}{2}, \qquad \varphi_{13}^{(0)} = \varphi_{22}^{(0)} = \varphi_{04}^{(0)} = 0.$$

Явный вид коэффициентов формы Γ_6 в (3.6) в силу их громоздкости не приводятся.

Рассмотрим движение на нулевом изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$, отвечающем невозмущённому периодическому движению. Эволюция переменных q_2, p_2 на уровне $\Gamma = 0$ может быть описана с помощью редуцированной канонической системы (уравнения Уиттекера)

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{\partial K}{\partial p_2}, \qquad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{\partial K}{\partial q_2}, \tag{3.8}$$

где w играет роль новой независимой переменной, а эволюция переменной ζ определяется соотношением $\zeta = -K\left(q_2, p_2, w\right)$, которое является результатом решения уравнения $\Gamma = 0$ относительно ζ. При малых q_2, p_2, ζ гамильтониан K

можно представить в виде ряда по степеням q_2, p_2. Принимая во внимание формулы (3.5) и (3.6), получаем следующее разложение функции Гамильтона K в ряд по q_2, p_2

$$K = K_2 + K_4 + K_6 + \ldots \quad , \tag{3.9}$$

где

$$\begin{aligned}
&K_2 = \omega^{-1}\Phi_{20}, \\
&K_4 = \omega^{-1}\left[\chi\Phi_{20}^2 + \Phi_{22}\Phi_{20} + \Phi_{40}\right], \\
&K_6 = \omega^{-1}\left[\Phi_{20}^3\left(2\chi^2 - \chi_6\right) + \Phi_{20}^2\left(\Phi_{24} - 3\chi\Phi_{22}\right) + \right. \\
&\left. + \Phi_{20}\left(2\chi\Phi_{40} + \Phi_{22}^2 - \Phi_{42}\right) - \Phi_{22}\Phi_{40} + \Phi_{60}\right].
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Таким образом, задача об орбитальной устойчивости периодических движений твёрдого тела свелась к задаче об устойчивости положения равновесия системы (3.8).

Нелинейный анализ орбитальной устойчивости маятниковых колебаний в критическом случае

В этом разделе мы кратко изложим достаточные условия орбитальной устойчивости маятниковых колебаний в случае резонанса четвертого порядка при наличии вырождения, когда необходимо учитывать члены не ниже шестого порядка в разложении гамильтониана (3.9). С этой целью приведем вид нормальной формы гамильтониана редуцированной системы с одной степенью свободы (3.8) и выпишем численные значения ее коэффициентов для указанных случаев. Затем применим известные критерии устойчивости.

В случае резонанса четвертого порядка линейной канонической периодической по w заменой переменных $q_2, p_2 \to u, v$ квадратичная часть гамильтониана приводится к нормальной форме, соответствующей гамильтониану гармонического осциллятора

$$K = \frac{\Omega}{2}\left(u^2 + v^2\right) + K_4\left(u, v, w\right) + K_6\left(u, v, w\right) + \ldots \tag{4.1}$$

Далее для удобства перейдем к полярным координатам по следующим формулам:

$$u = \sqrt{2r}\sin\phi, \qquad v = \sqrt{2r}\cos\phi. \tag{4.2}$$

Нелинейной канонической заменой переменных $r, \phi \to R, \vartheta$ гамильтониан (4.1) можно привести к нормальной форме

$$\begin{aligned} K = \Omega R + \left(c_2 + a_4\cos\left(4\vartheta - nw\right) + b_4\sin\left(4\vartheta - nw\right)\right)R^2 + \\ + \left(c_3 + \alpha_4\cos\left(4\vartheta - nw\right) + \beta_4\sin\left(4\vartheta - nw\right)\right)R^3 + O\left(R^4\right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Если выполнено неравенство $a_4^2 + b_4^2 \neq c_2^2$, то вопрос об устойчивости системы с гамильтонианом (4.3) решается на основании коэффициентов нормальной формы членов до четвертого порядка включительно. Такое исследование было выполнено в работе [15]. В данной работе рассматривается случай вырождения, который соответствует равенству

$$a_4^2 + b_4^2 = c_2^2, \tag{4.4}$$

который реализуется в точках $F_i, E_i, D_i, i = 1,2$ (Рис. 2). Для исследования устойчивости в данном случае вырождения можно применить результаты работы [16], где было показано, что при выполнении неравенства

$$c_2c_3 - a_4\alpha_4 - b_4\beta_4 > 0 \qquad (4.5)$$

тривиальное положение равновесия системы (3.8) устойчиво. При выполнении неравенства с противоположным знаком, то есть если выполнено неравенство

$$c_2c_3 - a_4\alpha_4 - b_4\beta_4 < 0, \qquad (4.6)$$

имеет место неустойчивость.

Отметим, что из неустойчивости тривиального положения равновесия редуцированной системы (3.8), следует, что имеет орбитальная неустойчивость исследуемой периодической орбиты. Если же положение равновесия устойчиво редуцированной системы (3.8), то можно сделать вывод об орбитальной устойчивости на уровне энергии, отвечающем невозмущенной периодической орбите.

В данной работе для получения выводов об устойчивости и проверки неравенств (4.5-4.6) коэффициенты нормальной формы вычислялись на основе метода, разработанного в [17]. Суть этого метода состоит в построении симплектического отображения, порожденного системой нелинейных уравнения (3.8). Используя коэффициенты построенного симплектического отображения, можно получить коэффициенты нормальной формы (4.3). Результаты численного анализа коэффициентов нормальной формы представлены в таблице 2, где используется следующее обозначение $\delta_4 = c_2c_3 - a_4\alpha_4 - b_4\beta_4$.

Таблица 2. Результаты вычислений.

Точка F_1	h	α	δ_4
F_1	-0.9285	0.6112	20035
F_2	-0.9282	0.6113	-118298
D_1	-0.8758	1.3406	-1.9036
D_2	-0.8580	1.3593	1.8251
E_1	-0.5695	1.4636	-13.3151
E_2	-0.5415	1.4675	2.8027

В точках F_1, D_2, E_2 имеем $\delta_4 > 0$, то есть выполнено неравенство (4,5). Таким образом в этих точках имеет место орбитальная устойчивость на уровне энергии, отвечающем невозмущенной периодической орбите. В точках F_2, D_1, E_1 имеем $\delta_4 < 0$, то есть выполнено неравенство (4.6) и имеет место орбитальная неустойчивость.

Таким образом, результаты проведенного исследования, совместно с результатами, полученными в работах [14-15], позволяют получить полное и строгое решение задачи об орбитальной устойчивости рассматриваемой механической системы при наличии в системе резонансов четвертого порядка.

Выводы

Проведенное исследование позволило получить строгие выводы об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, главные моменты инерции которого удовлетворяют соотношению $A = C = 4B$. Был рассмотрен неисследованный ранее вырожденный случай, когда в системе имеет место резонанс четвертого порядка, а для решения задачи об орбитальной устойчивости необходимо проводить анализ с учетом членов до шестого порядка включительно в разложении гамильтониана в окрестности невозмущенного движения. Были найдены значения параметров, которые приводят к орбитальной неустойчивости рассматриваемой механической системы и качественно изменяют характер движения систем. Данный факт необходимо учитывать при построении адекватных математических моделей современных технических систем.

Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук Бардину Борису Сабировичу за помощь в постановке задачи и обсуждение результатов.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00162, https://rscf.ru/project/24-11-00162/ в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

Список источников

1. Маркеев А.П. Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. С. 51-58.

2. Маркеев А.П., Медведев С.В., Чеховская Т.Н. К задаче об устойчивости маятниковых движений твердого тела в случае Ковалевской // Изв. РАН. МТТ. 2003. №1. С. 3-9.

3. Иртегов В.Д. Устойчивость маятниковых колебаний гироскопа Ковалевской //Тр. Казан. Авиац. ин-т математики и механики, 1968. Т. 97. С. 38-40

4. Брюм А.З. Исследование орбитальной устойчивости при помощи первых интегралов // Прикладная математика и механика. 1989. Т. 53. № 6. С. 873-879.
5. Брюм А.З., Савченко А.Я. Об орбитальной устойчивости одного периодического решения уравнений движения гироскопа Ковалевской // Прикладная математика и механика. 1986. Т. 50. №6. С. 967-973.
6. Бардин Б. С. К задаче об устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Горячева-Чаплыгина // Изв. РАН. МТТ. 2007. №2. С. 14-21.
7. Bardin B.S. On a Method of Introducing Local Coordinates in the Problem of the Orbital Stability of Planar Periodic Motions of a Rigid Body // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2020. V. 16. № 4. P. 581-594.
8. Маркеев А.П. О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева – Чаплыгина // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68. №2. С. 282-293.
9. Bardin B.S., Rudenko T.V., Savin A.A. On the Orbital Stability of Planar Periodic Motions of a Rigid Body in the Bobylev–Steklov Case //Regular and Chaotic Dynamics. 2012. V. 17. №6. P. 533-546.
10. Bardin B.S. Local coordinates in problem of the orbital stability of pendulum-like oscillations of a heavy rigid body in the Bobylev–Steklov case // J. Phys.: Conf. Ser., Bristol. 2021. 012016. P. 1-10.
11. Yehia H.M., Hassan S.Z., Shaheen M.E. On the orbital stability of the motion of a rigid body in the case of Bobylev–Steklov. // Nonlinear Dyn. 2015. V. 80. №3. P. 1173–1185.
12. Bardin B.S., Savin A.A. On the Orbital Stability of Pendulum-like Oscillations and Rotations of a Symmetric Rigid Body with a Fixed Point // Regular and Chaotic Dynamics. 2012. V. 17. № 3-4. P. 243-257.
13. Бардин Б.С., Савин А.А. Об устойчивости плоских периодических движений симметричного твердого тела с неподвижной точкой // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. № 6. С. 806-821.
14. Bardin B.S., Maksimov B.A., The orbital stability analysis of pendullum oscillations of a heavy rigid body with a fixed point under the Goriachev-Chaplygin condition // Journal of Mathematical Sciences. 2023. vol. 1. № 275. P. 66-77.

15. Бардин Б.С., Максимов Б.А., Об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, главные моменты инерции которого находятся в отношении 4:1:4 // Прикладная математика и механика. 2023. Т. 87. № 5. С. 784-800.
16. Маркеев А.П. О критическом случае резонанса четвертого порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. № 3. С. 369-376.
17. Маркеев А.П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // Изв. РАН. МТТ. 2004. №6. С. 3-12.

References

1. Markeev A.P. The stability of the plane motions of a rigid body in the Kovalevskaya case // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2001, vol. 65, no. 1, pp.51-58.
2. Markeev A.P. Medvedev S.V., Chekhovskaya T.N. To the problem of stability of pendulum-like vibrations of a rigid body in Kovalevskaya's case // Mechanics of Solids, vol. 38, no. 1, pp. 1-6.
3. Irtegov V.D. The Stability of the pendulum-like oscillations of a Kovalevskaya gyroscope // Trudy Kazan. Aviats. Inst. Matematika i Mekhanika, 1968, vol. 97, pp. 38-40 (in Russian).
4. Bryum A.Z. A study of orbital stability by means of first integrals // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1989, vol. 53, no. 6, pp. 689-695.
5. Bryum A.Z., Savchenko A.Ya. On the orbital stability of a periodic solution of the equations of motion of a Kovalevskaya gyroscope // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1986, vol. 50, no. 6, pp. 748-753.
6. Bardin B.S. Stability problem for pendulum-type motions of a rigid body in the Goryachev-Chaplygin case // Mechanics of Solids, 2007, vol. 42, no. 2, pp. 177-183.
7. Bardin B.S. On a Method of Introducing Local Coordinates in the Problem of the Orbital Stability of Planar Periodic Motions of a Rigid Body // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2020, vol. 16, no. 4, pp. 581-594.
8. Markeev A.P. The pendulum-like motions of a rigid body in the Goryachev-Chaplygin case // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2004, vol. 68, no. 2, pp. 249-258.

9. Bardin B.S., Rudenko T.V., Savin A.A. On the Orbital Stability of Planar Periodic Motions of a Rigid Body in the Bobylev–Steklov Case //Regular and Chaotic Dynamics, 2012, vol. 17, no. 6, pp. 533-546.
10. Bardin B.S. Local coordinates in problem of the orbital stability of pendulum-like oscillations of a heavy rigid body in the Bobylev–Steklov case // J. Phys.: Conf. Ser., Bristol, 2021, 012016, pp. 1-10.
11. Yehia H.M., Hassan S.Z., Shaheen M.E. On the orbital stability of the motion of a rigid body in the case of Bobylev–Steklov. // Nonlinear Dyn., 2015, vol. 80, no. 3, pp. 1173–1185.
12. Bardin B.S., Savin A.A. On the Orbital Stability of Pendulum-like Oscillations and Rotations of a Symmetric Rigid Body with a Fixed Point // Regular and Chaotic Dynamics, 2012, vol. 17, no. 3-4, pp. 243-257.
13. Bardin B.S., Savin A.A. The stability of the plane periodic motions of a symmetrical rigid body with a fixed point // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2013, vol. 77, no. 6, pp. 806-821.
14. Bardin B.S., Maksimov B.A., The orbital stability analysis of pendullum oscillations of a heavy rigid body with a fixed point under the Goriachev-Chaplygin condition // Journal of Mathematical Sciences, 2023, vol.1, no.275, pp.66-77.
15. Bardin B.S., Maksimov B.A., On the orbital stability of pendullum periodic motions of a of a heavy rigid body with a fixed point in the case of principal inertia moments ratio 4:1:4 // Mechanics of Solids, 2023, vol.8, no.58, pp. 2894-2907.
16. Markeev A.P. The critical case of fourth-order resonance in a hamiltonian system with one degree of freedom // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1997, vol.61, no.3, pp. 355-361.
17. Markeev A. P. Stability of equilibrium states of hamiltonian systems: a method of investigation // Mechanics of Solids, 2004, vol.39, no.6, pp. 1-8.