Труды МАИ. 2025. № 144
Trudy MAI. 2025. No. 144. (In Russ.)

МЕХАНИКА

Научная статья
УДК 532.507
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=186306
EDN: https://www.elibrary.ru/ PHBPHZ

О ВЛИЯНИИ СКОРОСТИ ПРОИЗВОДСТВА ЭНТРОПИИ НА РЕАЛИЗАЦИЮ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Ольга Николаевна Хатунцева[1,2]

[1]Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва»,
Королев, Московская область, Россия

[2]Московский физико-технический институт,
Долгопрудный, Московская область, Россия

olga.khatuntseva@rsce.ru

Аннотация. Диссипативные системы можно условно разделить на два типа: те, в которых скорость производства энтропии стремится к возможному минимальному значению (Принцип минимума производства энтропии Пригожина), и те, в которых скорость производства энтропии стремится к своему максимально возможному значению (Принцип максимума производства энтропии Циглера).

Для корректного описания диссипативных систем принципиальным вопросом является возможность с помощью уравнений описывать не только количество производимой в системе энтропии, но и различный характер ее производства. А именно, очень важно, чтобы уравнения, описывающие процессы, происходящие в

диссипативных системах, могли характеризовать и производство энтропии вблизи положения равновесия, и производство энтропии вдали от него.

Исследование двух режимов течения позволяет сказать, что ламинарный режим соответствует процессу, находящемуся вблизи положения равновесия (и характеризуется Принципом минимума производства энтропии Пригожина), а турбулентный – вдали от него (и характеризуется Принципом максимума производства энтропии Циглера). На кинетическом уровне описания это означает, что для турбулентного режима характерно сильное влияние редких событий, приводящих к тому, что в каждый момент времени плотности вероятности реализации случайной величины (например, скорости) могут реализовываться неединственным образом.

Учет различного характера производства энтропии, начиная уже с записи уравнения Лиувилля, позволяет последовательно перейти к «модифицированному» уравнению Больцмана и «модифицированной» системе уравнений Навье-Стокса, что дает возможность описывать как ламинарные, так и турбулентные режимы течения на основе одних и тех же уравнений. В результате удается аналитически определить «ламинарные» и обобщенные «турбулентные» решения для классических задач гидродинамики.

В данной работе рассматривается ряд вопросов, поставленных в той части шестой проблемы Гильберта, которая касается корректности перехода от описания взаимодействия отдельных молекул на основе уравнений Ньютона, к описанию механики жидкости и газа на основе уравнений Навье-Стокса, опосредовано через уравнения Лиувилля и Больцмана.

Ключевые слова: принципы минимума и максимума производства энтропии, ламинарное и турбулентное течение, уравнения Лиувилля, Больцмана, Навье-Стокса.

Для цитирования: Хатунцева О.Н. О влиянии скорости производства энтропии на реализацию режима течения жидкости и газа // Труды МАИ. 2025. № 144. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=186306

MECHANICS

Original article

ON THE INFLUENCE OF ENTROPY PRODUCTION RATE ON THE REALIZATION OF LIQUID AND GAS FLOW REGIMES

Olga N. Khatuntseva[1,2]

[1]Korolev Rocket and Space Corporation «Energia»,

Korolev, Moscow region, Russia

[2]Moscow Institute of Physics and Technology,

Dolgoprudny, Moscow region, Russia

olga.khatuntseva@rsce.ru

Abstract. Dissipative systems can be divided into two types: those in which the rate of entropy production tends to its minimum possible value (Prigogine's Minimum Entropy Production Principle), and those in which the rate of entropy production tends to its maximum possible value (Ziegler's Maximum Entropy Production Principle).

For a correct description of dissipative systems, a fundamental issue is the possibility of using equations to describe not only the amount of entropy produced in the system, but also the different nature of its production. Specifically, it is crucial that the equations describing the processes occurring in dissipative systems can characterize both the production of entropy near the equilibrium state and the production of entropy far from it.

The study of the two flow regimes allows us to say that the laminar regime corresponds to a process that is close to equilibrium (and is characterized by Prigogine's Minimum Entropy Production Principle), while the turbulent regime is far from equilibrium (and is characterized by Ziegler's Maximum Entropy Production Principle). At the kinetic level of description, this means that the turbulent regime is characterized by a strong influence of rare events, which can lead to multiple realizations of a random variable (such as velocity) at each point in time.

The account of the different nature of entropy production, starting already with the recording of the Liouville equation, allows to consistently pass to the “modified” Boltzmann equation and the “modified” system of the Navier-Stokes equations, which makes it possible to describe both laminar and turbulent flow regimes on the basis of the same equations. As a result, it is possible to analytically determine “laminar” and generalized “turbulent” solutions for classical problems of hydrodynamics.

This paper addresses a number of issues related to the sixth problem of Hilbert, which concerns the correctness of the transition from the description of the interaction of individual molecules based on Newton's equations to the description of fluid and gas mechanics based on the Navier-Stokes equations, which are mediated through the Liouville and Boltzmann equations.

Keywords: principles of minimum and maximum entropy production, laminar and turbulent flow, Liouville, Boltzmann, and Navier-Stokes equations.

For citation: Khatuntseva O.N. On the effect of entropy production rate on the implementation of flow regime. Trudy MAI. 2025. No. 144. (In Russ.) URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=186306

Введение

Исследования отличия диссипативных систем с позиции скорости производства энтропии в них начались с работ И. Пригожина. Вначале, используя соотношения Онсагера, Пригожин пришел к выводу, что в диссипативных системах скорость производства энтропии должна стремиться к возможному минимальному значению (Принцип минимума производства энтропии Пригожина). Однако, в дальнейшем, пересмотрев свои взгляды, он (совместно с другими учеными, занимающимися исследованиями в данном направлении, в частности, Циглером) сделал заключение, что этот принцип действует только в том случае, если диссипативная система находится вблизи от положения равновесия. В случае, когда система находится вдали от положения равновесия, ситуация меняется на противоположную, и скорость производства энтропии стремится к своему максимально возможному значению (Принцип максимума производства энтропии Циглера). Именно такие состояния диссипативных систем сопровождаются образованием временных и пространственных структур, примерами которых являются ячейки Бенара, реакция Белоусова-Жаботинского и пр. [1].

В данной работе на основе различия этих двух принципов рассмотрим отличие ламинарного и турбулентного режимов течения и подходы к их моделированию с помощью модифицированных уравнений Навье-Стокса (МУНС). Помимо практического интереса в части использования данного метода к решению задач гидро-газодинамики, этот подход позволяет приблизиться к решению той части шестой проблемы Гильберта, которая касается вопросов корректности перехода от описания взаимодействия отдельных молекул на основе уравнений Ньютона, к описанию механики жидкости и газа на основе уравнений Навье-Стокса, опосредовано через уравнение Больцмана [2].

Отличие характера производства энтропии в ламинарном и турбулентном режимах течения

Природа турбулентного режима течения, являясь темой исследования нескольких поколений ученых в течение уже более ста лет [3-17], до сих пор остается не до конца понятой.

В более ранних работах автора [18-21] изучался вопрос возможности описания как ламинарных, так и турбулентных режимов течения на основе одних и тех же – модифицированных уравнений Навье-Стокса (МУНС) - с позиции отличия ***количества*** производимой в них энтропии. В данной работе покажем важность учета мини-максного принципов производства энтропии при исследовании гидродинамических процессов.

Решение этого вопроса крайне важно, как с теоретической точки зрения, так с точки зрения возможности применения этой теории в прикладных задачах, поскольку окончательным ответом на него может стать построение универсальной модели динамики жидкости и газа, дающей возможность описывать течение, без использования эмпирических данных, и учитывающей разномасштабный стохастический характер турбулентного режима из первых принципов.

Являясь практически неотличимыми на масштабе теплового движения молекул, ламинарный и турбулентный режимы демонстрируют явные отличия на макромасштабах: турбулентный режим имеет черты стохастического процесса в широком диапазоне масштабов, в то время как ламинарный режим можно считать вполне детерминированным на всех масштабах, существенно превосходящих характерные размеры теплового движения молекул.

Флуктуации скорости на масштабе теплового движения молекул (и в ламинарном, и в турбулентном режимах) имеют черты стохастического процесса, находящегося ***вблизи*** положения равновесия, поскольку производство энтропии в нем порождает возникновение сил трения, являющихся с большой точностью детерминированными.

Турбулентный режим, являясь, по сути, ***многомасштабным*** стохастическим процессом, практически на всех масштабах (за исключением масштаба теплового движения молекул) демонстрирует черты, присущие диссипативным системам, находящимся ***вдали*** от положения равновесия, в частности, создает и поддерживает временные и пространственные структуры. Это явление, присущее турбулентности, называемое перемежаемостью, представляет собой многократную смену режимов течения, как в пространстве, так и во времени: от спокойного - почти ламинарного режима, до стохастического - турбулентного, и обратно. Несмотря на то, что эффекты перемежаемости в турбулентном течении демонстрируют случайную природу, сценарии возникновения смены режимов имеют черты повторяющихся (хоть и не строго и не детерминировано) во времени и пространстве процессов.

Производство энтропии является основной причиной необратимости процессов по времени, что должно быть учтено при записи (выводе) уравнений, описывающих их. В уравнениях Навье-Стокса за необратимость по времени, связанную с производством энтропии, подчиняющемуся принципу минимума (далее будем называть ее термодинамической энтропией), «отвечают» вязкие члены в правых частях уравнений. Невязкие уравнения Эйлера являются обратимыми по времени. При этом, в УНС нет специальных членов, описывающих необратимость, связанную с принципом максимума производства энтропии. Это, в частности, приводит к следующему парадоксу: в УНС, записанных в безразмерном виде, множители в правых частях уравнений при вязких членах, обратно пропорциональны числу Рейнольдса и, соответственно, с увеличением числа Рейнольдса (когда должны усиливаться проявления необратимости, связанные с турбулентной стохастичностью) члены, отвечающие за необратимость в УНС, наоборот уменьшаются (вплоть до стремления к нулю при очень больших числах Рейнольдса). Простое добавление членов в правую часть УНС не изменит качественно ситуацию. В самом деле, если в правые («источниковые») части УНС, записанные в безразмерном виде, добавить члены, которые с увеличением значения числа Рейнольдса вместо уменьшения будут увеличиваться, то это приведет к «расходимости» уравнений. Если добавить члены, которые не будут зависеть от изменения числа Рейнольдса, то в зависимости от знаков добавочных членов, их включение в уравнение будет аналогично либо увеличению градиента давления, либо увеличению вязкости (причем, дополнительная вязкость будет оставаться неизменной при увеличении числа Рейнольдса). Добавление таких членов смещает положение равновесия, но не влияет на характер производства энтропии. Измененные таким образом уравнения вновь будут описывать гидродинамические процессы вблизи положения равновесия, и производство энтропии в них вновь будет соответствовать Принципу ***минимума*** производства энтропии Пригожина.

Дополнительные члены в УНС (а также дополнительные уравнения для «замыкания» системы уравнений) используются в методах усреднения Рейнольдса (семейство методов RANS). Эти методы, позволяющие находить «турбулентные» решения в небольшом диапазоне изменений параметров и геометрии течения (причины такой возможности будут обсуждены ниже), не обладают свойством универсальности. Можно предположить, что причиной этого является отсутствие возможности согласовано выйти за ограничения действия Принципа минимума производства энтропии Пригожина ***во всем пространстве течения***. Поиск решений в методах RANS осуществляется в ***локальных*** областях за счет, искусственного подбора дополнительных уравнений и «подстройки» значений параметров, используемых в моделях. Более подробно к этому вопросу вернемся немного позднее.

Чтобы решить проблему, связанную с парадоксом уменьшения необратимости УНС, записанных в безразмерном виде при больших значениях числа Рейнольдса, и попытаться построить модели динамики жидкости, дающие общие универсальные решения, как для ламинарных, так и для турбулентных режимов, необходимо понять природу стохастических процессов, в которых производство энтропии соответствует принципу максимума, на кинетическом уровне.

Как показано в работе [22], нахождение системы вдали от положения равновесия создает предпосылки для изменения плотности вероятности реализации случайных возмущений в каждый момент времени ***неединственным*** образом. Именно это можно считать главной отличительной особенностью диссипативных систем, находящихся вдали от положения равновесия, от тех систем, которые находятся вблизи от него, и, в частности, это является отличительной особенностью «турбулентного» течения от «ламинарного» в широком диапазоне масштабов на ***кинетическом*** уровне. Полезно еще раз подчеркнуть, что ***на масштабе теплового движения молекул*** гидродинамические системы находятся вблизи от положения равновесия, и «ламинарный» сценарий, соответствующий принципу минимума производства энтропии, продолжает действовать на этом масштабе и в турбулентном режиме течения. Тем не менее, возможность осуществления эволюции плотности вероятности ***единственным*** образом в дальнейшем будем называть «ламинарным», а ***неединственным*** – «турбулентным» сценариями. При этом слова: «ламинарный» и «турбулентный» ***режимы***, относятся к рассмотрению гидродинамического процесса в целом.

Для того чтобы разные сценарии могли описываться одними и теми же уравнениями, необходимо внести изменения в математические модели, начиная уже с записи уравнения Лиувилля (поскольку именно оно отвечает за описание процесса на кинетическом уровне) [18], а затем, последовательно изменяя, следующие из него уравнение Больцмана и систему уравнений Навье-Стокса.

Уравнение Лиувилля изначально записывалось, исходя из предположения, что плотность вероятности реализации случайной величины может изменяться единственно возможным образом – по «ламинарному» сценарию. Именно поэтому «классическое» уравнение Лиувилля может описывать как изменение по времени плотности вероятности, так и изменение функции, характеризующей распределение случайной величины.

Если расширить математическую модель процесса, предполагая, что плотность вероятности может реализовываться неединственным образом (и таким образом включить в процесс рассмотрения и возможный «турбулентный» сценарий), то необходимо учесть, что функция, характеризующая распределение случайной величины на некотором интервале времени, может отличаться от плотностей вероятности. Причем, независимо от того, какой вид будут иметь возможные реализации плотностей вероятности (в том диапазоне значений, где они могут реализовываться неединственным образом) распределение случайной величины в соответствии с Центральной предельной теоремой, будет стремиться к форме в виде «гауссианы».

Плотности вероятности в силу различных физических причин (например, из-за наличия предельных значений скорости в системе с определенным количеством кинетической энергии), должны быть ограничены по диапазону значений и, при этом, диапазоны значений для разных плотностей вероятности обычно отличаются (например, для растущих и спадающих функций). В силу этого, в том диапазоне, где могут реализовываться две (или более) плотности вероятности, форма распределения случайной величины будет соответствовать «гауссиане», а там, где останется возможность реализации только одной из плотностей вероятности, распределение будет иметь тот же вид, что и реализуемая плотность вероятности – обычно это спадающая степенная функция. В таком сценарии, распределение случайной величины на некотором интервале времени во всем диапазоне значений, как правило, имеет вид «гауссианы» с «тяжелыми степенными хвостами» [22].

При этом, эволюция функции, характеризующей распределение случайной величины по времени (в отличие от эволюции плотностей вероятности), будет происходить единственным образом. И, следовательно, уравнение Лиувилля после модификации, учитывающей возможность реализации неединственной плотности вероятности, может описывать только функцию, характеризующую распределение случайной величины (а не плотность вероятности).

«Модифицированное» уравнение Лиувилля [18], учитывающее возможную зависимость распределения случайной величины f от функционального изменения плотности вероятности φ, должно быть записано в расширенном фазовом пространстве, включающем дополнительную переменную, характеризующую это изменение:

$$(t, \vec{x}, \vec{p}) \to (t, \vec{x}, \vec{p}, \varphi). \tag{1}$$

Соответственно, уравнение Лиувилля для N-частичной функции $f_N = f_N(x_1, \dots, x_{3N}, p_1, \dots p_{3N}, t)$, характеризующей распределение случайной величины:

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \dot{x}_i \frac{\partial f_N}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3N} \dot{p}_i \frac{\partial f_N}{\partial p_i} = 0, \quad (2)$$

в расширенном фазовом пространстве ($f_N = f_N(x_1, \dots, x_{3N}, p_1, \dots p_{3N}, t, \varphi)$) приобретет вид:

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \dot{x}_i \frac{\partial f_N}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3N} \dot{p}_i \frac{\partial f_N}{\partial p_i} + \dot{\varphi} \frac{\partial f_N}{\partial \varphi} = 0. \quad (3)$$

Энтропия: $S = -\int \varphi ln\varphi \prod_i dx_i dp_i$, функционально связана с плотностью вероятности φ, поэтому производную плотности вероятности можно выразить через производство энтропии: $\dot{\varphi} = \dot{S}\, \delta\varphi/\delta S$, записав последний член в уравнении (3) в виде: $\dot{S} \frac{\partial f_N}{\partial \varphi} \frac{1}{\delta S/\delta \varphi}$. Функциональную производную: $\delta S/\delta\varphi$, можно определить, скалярно домножив ее на пробную функцию h, из выражения:

$$\langle \delta S/\delta\varphi, h\rangle = \frac{-d}{dэ} \int \big(\varphi(p_i) + эh(p_i)\big) ln\big(\varphi(p_i) + эh(p_i)\big) \prod_i p_i \bigg|_{э=0} =$$

$$- \int (ln\varphi(p_i) + 1) h(p_i) \prod_i dp_i = \langle -(ln\varphi + 1), h\rangle. \quad (4)$$

В выражении (4) p_i обозначает любые переменные, от которых могут зависеть плотность вероятности и, соответственно, энтропия.

Из выражения (4) следует, что *δS/δφ=-lnφ-1*. Так как, *-(lnφ+1)δφ=δ(-φlnφ)*, то обозначив $\cancel{s} = -\varphi ln\varphi$, уравнение (3) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \dot{x}_i \frac{\partial f_N}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3N} \dot{p}_i \frac{\partial f_N}{\partial p_i} + \dot{S} \frac{\partial f_N}{\partial \cancel{s}} = 0. \quad (5)$$

Когда изменение распределения по времени уже не может происходить самосогласованно только в фазовом пространстве координат и импульсов при детерминированном (однозначном) изменении плотности вероятности, вступает в силу механизм изменения плотности вероятности неединственным образом, то есть становится ненулевым последний член в уравнении (5). Влияние этого члена должно расти с увеличением внешнего воздействия на локальную область фазового пространства. Поскольку, плотность вероятности лежит в диапазоне: $0 \le \varphi \le 1$, то нетрудно заметить, что область значения новой «стохастической» переменной $\mathfrak{s}$ будет лежать в интервале: $0 \le \mathfrak{s} \le 1/e \approx 0.368$. Это означает, что независимо от конкретного стохастического процесса, происходящего вдали от положения равновесия, от плотностей вероятности, реализующихся в нем (главное, чтобы их было больше одной), новая «стохастическая» переменная в модифицированном уравнении Лиувилля будет принимать значения из одного и того же довольно узкого интервала: от 0 до, примерно, 0.368. Соответственно, рост влияния последнего члена в уравнении (5) (при увеличении внешнего воздействия на систему) будет происходить в основном за счет увеличения множителя, характеризующего производство энтропии $\dot{s}$. Это говорит о том, что дополнительный член в этом уравнении будет характеризовать процесс, соответствующий принципу максимума производства энтропии Циглера.

Поскольку в стохастическом процессе плотность вероятности может реализовываться либо единственным, либо неединственным образом (при этом не важно сколько конкретно плотностей вероятности может быть) и между этими состояниями не существует промежуточных, то, разумеется, переход из состояния с производством энтропии, подчиняющимся Принципу минимума, к состоянию, подчиняющемуся Принципу максимума, происходит скачкообразно.

Последнее слагаемое в уравнениях (3), (5) становится ненулевым только в том случае, когда в рассматриваемой системе осуществляется производство энтропии: $dS/dt>0$. В соответствии со вторым законом термодинамики, производство энтропии в замкнутой системе всегда неотрицательно независимо от направленности протекания процесса. Поэтому при ненулевом значении производства энтропии при изменении направления течения времени, член: $\dot{S}\,\partial f_N/\partial S$, остается тем же самым, а все остальные слагаемые, входящие в уравнение (5), меняют знаки. В результате для уравнения (5) теряется свойство обратимости по времени. Стоит еще раз подчеркнуть, что эта необратимость не связана с термодинамическим ростом энтропии, а определена неоднозначностью реализации плотности вероятности в каждый момент времени в системе, находящейся вдали от положения равновесия (например, в турбулентном режиме течения), что ведет к распределению, имеющего вид Гауссовой функции с «тяжелыми» степенными «хвостами».

В том случае, если производство энтропии: dS/dt в левой части уравнения (5) станет нулевым, модифицированное уравнение Лиувилля превратится в классическое уравнение Лиувилля и будет описывать одновременно и эволюцию распределения, и плотность вероятности реализации случайной величины. Реализация плотности вероятности, в соответствии с теоремой Коши о существовании и единственности, станет единственно возможной в каждый момент времени. Решение уравнения (5) с последним членом, равным нулю, не будет в общем виде являться Гауссовой функцией с «тяжелыми» степенными «хвостами», и на кинетическом уровне описания вся система перейдет в новое состояние, эволюционирующее вблизи положения равновесия, причем, переход этот будет иметь скачкообразный характер, аналогичный фазовому переходу. В случае с гидродинамической системой произойдет переход от турбулентного режима течения к ламинарному.

Самое время еще раз задаться вопросом, почему же УНС в модификации RANS с ***неизмененной*** левой частью, но с дополнительными членами в правой, позволяют описывать турбулентные течения, пусть и с помощью специально настраиваемых параметров в ограниченных областях? Для ответа на этот вопрос полезно вспомнить об отсутствии аналитических решений (для осредненных характеристик течения) в таких моделях. Все решения, соответствующие «турбулентному», определяются только численными методами на специально подобранных расчетных сетках. Эти сетки, в соответствии с размерами ячеек, сами вносят определенные возмущения на минимальном масштабе расчетной области. Дополнительные уравнения в моделях RANS вносят возмущения в решения уравнений на макромасштабах. Все это может приводить (если говорить о плотности вероятности распределения решения) к неоднозначностям в каждый момент времени и, практически, в каждой подобласти расчетной области. Такое влияние дополнительных разномасштабных возмущений на решение уравнений является аналогом источника производства нетермодинамической энтропии для систем, ***не находящихся*** вблизи положения равновесия (а точнее, искусственно выведенному из этого состояния), то есть, в какой-то мере, соответствующих Принципу максимума производства энтропии. И в какой-то степени, такое моделирование «турбулентности», можно считать ее аналоговым моделированием с постоянным внесением в систему внешних возмущений (примерно такое же, как если бы в физическом эксперименте в ламинарный поток вносились возмущения на двух различных масштабах). Минусом такого подхода, как уже говорилось выше, является отсутствие универсальности, поскольку вносимые возмущения имеют «искусственную» природу, не являются самосогласованными во всей области течения и должны «подбираться» специальным образом для каждой конкретной геометрии течения и его параметров, чтобы возмущения на двух масштабах могли порождать спектр возмущений.

Еще раз отметим, что переход от ламинарного режима к турбулентному с макроскопической точки зрения, возникает, когда гидродинамическая система теряет возможность «перерабатывать» всю поступающую в нее кинетическую энергию, только увеличивая направленную скорость потока и усиливая диссипацию энергии за счет действия сил вязкого трения, обусловленных термодинамическими процессами на масштабе броуновского движения молекул. Система вынуждено теряет устойчивость, переходит в состояние далекое от состояния термодинамического равновесия и включает механизм «переработки» излишней кинетической энергии в энергию стохастических возмущений, в первую очередь, за счет случайного изменения вида самой плотности вероятности в каждый момент времени. Это проявляется в образовании случайных вихрей в разных пространственных областях на разных масштабах, что и соответствует «включению» механизма производства энтропии ***нетермодинамического*** свойства, переходу в состояние далекому от равновесия - к турбулентному режиму течения.

Соответственно, величина производства ***нетермодинамической*** энтропии в последнем члене уравнения (5) будет определяться количеством поступающей извне кинетической энергии, которое система не может «утилизировать» за счет производства только ***термодинамической*** энтропии. И пока гидродинамическая система не справляется с «утилизацией» кинетической энергии за счет термодинамических механизмов, производство энтропии *dS/dt* в уравнении (5) не может ни самопроизвольно уменьшиться, ни оставаться постоянным при увеличении внешнего воздействия. В результате, с увеличением внешнего воздействия производство нетермодинамической энтропии будет увеличиваться.

Для того, чтобы системе оставаться в состоянии, описываемом Гауссовой функцией с «тяжелыми» степенными «хвостами», когда редкие события играют в стохастическом процессе значительную роль, ей ***необходимо*** находиться вдали от положения равновесия. За счет этого плотности вероятности в каждый момент времени будут реализовываться неединственным образом и, соответственно, производство нетермодинамической энтропии *dS/dt* будет ненулевым, течение в гидродинамической системе будет турбулентным, общее производство энтропии будет превышать производство энтропии в системе, находящейся вблизи от положения равновесия, и будет увеличиваться с увеличением внешнего воздействия. Такая система соответствует принципу максимума производства энтропии Циглера.

Термодинамический - «ламинарный» - процесс производства энтропии (в отличии от «турбулентного»), обусловлен, в первую очередь, внутренними молекулярными механизмами и мало изменяется при изменении внешнего воздействия на систему. В силу этого, его следует соотнести с Принципом минимума производства энтропии Пригожина.

При этом надо понимать, что производство ***термодинамической*** энтропии все-таки может варьироваться в определенном диапазоне значений (а не быть константой). Поэтому, возможна ситуация, когда в некотором диапазоне производства энтропии может существовать неоднозначность по механизму его действия: с одним и тем же суммарным количеством поступающей в систему кинетической энергии в локальной области пространства при определенных (нестационарных) условиях может «справиться» либо только термодинамический - «ламинарный» механизм производства энтропии (варьируемый в небольшом диапазоне значения), либо совместно с нетермодинамическим – «турбулентным». По всей видимости, это один из аспектов, влияющих на возникновение явления перемежаемости.

Механизмы производства «динамической» и термодинамической энтропии

Рассмотрим подробнее то, что касается возникновения механизмов производства энтропии, не связанной с неединственностью реализации плотности вероятности случайной величины, характеризующей течение.

С одной стороны, классическое (немодифицированное) уравнение Лиувилля (2) для N-частичной функции распределения f_N подчиняется теореме Коши о существовании и единственности и обладает свойством обратимости по времени. С другой стороны, для уравнения Больцмана [2], описывающего одночастичную функцию распределения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m}\nabla f + \vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = Stf, \text{ где } Stf = \int [f(t,\vec{r},\vec{v}')w(\vec{v}',\vec{v}) - f(t,\vec{r},\vec{v})w(\vec{v},\vec{v}')]d^3v', \quad (6)$$

получаемого из немодифицированного уравнения Лиувилля (2) (последовательной сверткой цепочки уравнений Боголюбова), на математическом уровне строгости доказана Н-теорема. Это говорит о том, что уравнение Больцмана (6) описывает необратимый по времени процесс для системы, находящейся вблизи положения равновесия, даже без использования в уравнении дополнительного – вязкого - члена, характеризующего производство ***термодинамической*** энтропии.

Уравнение Больцмана (6) не вполне эквивалентно N-частичному уравнению Лиувилля (2) с точки зрения обратимости, в силу того, что при переходе к нему от уравнения Лиувилля не рассматриваются эффекты, считающиеся малыми: конечный размер сталкивающихся частиц, дальнодействие, одновременное соударение трех и более частиц и т.д. В результате неучета этих и других факторов, уравнение Больцмана в общем случае должно приобретать необратимый по времени вид. Однако, неучет всех факторов не описывается в полной мере производством ***термодинамической*** энтропии.

В самом деле, напрямую из уравнения Больцмана можно получить только гидродинамическую систему уравнений Эйлера, не учитывающую вязкость (и при этом, являющейся обратимой по времени). Для получения системы уравнений Навье-Стокса приходится прибегать к разложению правой части уравнения Больцмана – интеграла столкновения – по малому параметру, обратно пропорциональному числам Кнудсена, то есть, по сути, расширять фазовое пространство с помощью дополнительной переменной. Таким образом, происходит учет дальнодействия.

Казалось бы, что учет дополнительного фактора должен был бы, приблизить уравнение Больцмана к исходному уравнению Лиувилля и, соответственно, уменьшить производство энтропии, описываемой Н-теоремой [2], однако, учет дальнодействия в первом члене разложения приводит к обратному эффекту – к увеличению производства энтропии за счет появлении «вязких» членов (которые и позволяют перейти от обратимых уравнений Эйлера к необратимым уравнениям Навье-Стокса). Именно это производство энтропии является термодинамическим. Но и это еще не все. Дальнейшее разложение по малому порядку и вовсе приводит к расходимости правой части уравнения Больцмана.

Отталкиваясь от этих противоречий, хотелось бы прояснить природу производства энтропии в нулевом члене разложения (Н-теорема), несвязанного напрямую с вязкостью жидкости (и соответственно с термодинамической энтропией), понять, почему из необратимого уравнения Больцмана получаются обратимые уравнения Эйлера, а также выяснить механизмы расходимости при разложении правой части уравнения Больцмана по старшим членам, обратно пропорциональным числам Кнудсена.

Итак, интеграл столкновений в правой части уравнения Больцмана (6) появляется при редукции степеней свободы в уравнении Лиувилля (2), путем их последовательной свертки через цепочку уравнений Боголюбова. В работах [23-24] было показано, что нелинейная система автономных дифференциальных уравнений (АДУ), состоящая более чем из двух уравнений, в общем случае обладает свойством «несовместности». То есть, при интегрировании таких систем численными методами в общем случае не удастся подобрать для всех уравнений системы единые интервалы шага по времени. А именно, если сдвинуться на один итерационный шаг (относительно внешнего времени, не связанного с системой АДУ), посмотреть откуда «ушли» и куда «пришли» точки фазового пространства, а затем для перемещения в каждом направление определить свое время, то (в общем случае) времена, соответствующее разным направлениям, окажутся разными.

От неопределенности, связанной с несовместностью уравнений в системе АДУ, не удается избавиться, даже если пытаться вычислить «осредненный» для всех уравнений интервал времени – его (в общем случае) не удается подобрать, находясь только в области действительных значений. Переход в область комплексных значений «осредненных» интервалов времени приводит к их неоднозначному заданию относительно положительного и отрицательного значений на мнимой оси [23]. Таким образом, в системе АДУ появляется дополнительная, в общем случае, неустранимая неопределенность – происходит «перемешивание» возможных траекторий, описывающих решения в области действительных значений, от начального момента времени до текущего, что ведет к потере информации и, соответственно, к производству энтропии в системе. Далее эту неопределенность будем называть «динамической» неопределенностью, а производство энтропии, связанное с ней - производством «динамической» энтропии.

Насколько «динамическая» неопределенность будет проявляться в процессе вычисления зависит от вида самих уравнений: в некоторых случаях она будет несущественна (траектории в любом случае притягиваются к определенному аттрактору), в других - может привести к полной расходимости решений, а иногда (например, в системах уравнений, типа Лоренца [25]) это приводит к появлению ***странных*** аттракторов, формирующих решение в пространстве с дробной размерностью.

Уравнения в частных производных (УЧП), путем замены производных новыми переменными, могут быть сведены к системам АДУ (например, так как это сделано при выводе системы АДУ Лоренца). И, следовательно, УЧП в общем случае тоже обладают свойством несовместности при интегрировании их численными методами, и в них также может присутствовать «динамическая» неопределенность.

Для некоторых систем АДУ (в том числе, для системы Лоренца) доказаны теоремы об отсутствии у них аналитических решений. Это означает, что интегрирование численными методами и, соответственно, возникающие в процессе вычисления «динамические» неопределенности, являются в полной мере неустранимыми не только на вычислительном, но и на фактическом (физическом) уровне. Кроме того, если учесть, что физическим процессам не свойственны бесконечно малые масштабы (по крайней мере, на микроуровне они ограничены конечными размерами частиц из-за их «неточечности» и квантово-механическими соотношениями неопределенности), то все производные, присутствующие в УЧП, в общем случае не могут быть сведены к уровню рассмотрения бесконечно малых. Таким образом, вычислительная несовместность и «динамическая» неопределенность, заложенные в этих уравнениях, отражают и реальные физические процессы – производство «динамической» энтропии за счет «перемешивания» траекторий в рассматриваемом фазовом пространстве.

«Динамическая» неопределенность, присутствующая в УЧП, при редуцировании в ней числа переменных (за счет их последовательной свертки через систему промежуточных уравнений), должна переходить в уравнение, которое является результатом этой свертки. В случае с преобразованием N-частичного уравнения Лиувилля (2) к одночастичному уравнению Больцмана (6), «динамическая» неопределенность переходит в его правую часть – интеграл столкновения. При преобразовании интеграла столкновений и приведении его к виду (6), в подъинтегральном выражении делаются замены элементов фазового пространства, по которым ведется интегрирование. Эти замены не изменяют значения интегралов при интегрировании по всей области, однако, результатом таких процедур может стать «перемешивание» отдельных траекторий решений. Что, в принципе, отражает возможное «перемешивание» траекторий из-за несовместности промежуточных уравнений, используемых при получении уравнения Больцмана из уравнения Лиувилля, и из-за соответствующей «динамической» неопределенности, заложенной в окончательное интегро-дифференциальное уравнение Больцмана (6).

В работе [24] показано, что с увеличением числа уравнений в системе АДУ неопределенность, связанная с несовместностью уравнений, уменьшается – стремится к нулю при числе уравнений (степеней свободы) много больше единицы. Это и является причиной того, что из необратимого уравнения Больцмана удается напрямую получить обратимую систему уравнений Эйлера за счет того, что переход к этим уравнениям рассматривается в гидродинамическом приближении – при осреднении по некоторому малому, но конечному объему жидкости, в котором присутствует большое количество частиц и, соответственно, очень большое число степеней свободы.

Поскольку «динамическая» неопределенность не приводит к возникновению неоднозначной плотности вероятности реализации случайных величин (по крайней мере, в случае с уравнением Больцмана), то можно сказать, что связанные с этой неопределенностью процессы протекают вблизи положения равновесия и подчиняются Принципу минимума производства энтропии Пригожина.

Так как «динамическая» неопределенность быстро нивелируется с увеличением в системе степеней свободы и практически не влияет на гидродинамические процессы, ее наличие в уравнениях, имеет скорее теоретический интерес (в том числе, касающийся шестой проблемы Гильберта) в плане ответа на вопрос о причинах появления производства энтропии (Н-теорема) в, казалось бы, детерминированной системе частиц при ее описании кинетическим методом.

Можно констатировать, что основной причиной производства энтропии в уравнении Больцмана (Н-теорема), является «динамическая» неопределенность, являющаяся одновременно и вычислительной, заложенной в УЧП Лиувилля, и физической, поскольку эти уравнения, с одной стороны не имеет аналитических решений, с другой стороны, сводятся к интегро-дифференциальному уравнению.

Если говорить о задаче, поставленной в шестой проблеме Гильберта, касающейся корректности (или некорректности) перехода от описания взаимодействия отдельных частиц с помощью уравнений Ньютона к кинетическому подходу описания ансамбля частиц с помощью уравнений Лиувилля или Больцмана, то можно отметить следующее: при численном интегрировании уравнений в системе, описывающей гравитационное взаимодействие трех (и более) тел, возникают те же неопределенности из-за несовместности уравнений, что и для систем АДУ, УЧП, в том числе, и для уравнений Лиувилля и Больцмана. Из-за аналитической неразрешимости системы уравнений Ньютона для задачи трех и более тел, «динамическая» неопределенность присутствует и на физическом уровне (так же, как и в ансамблях частиц, описываемых уравнениями Лиувилля и Больцмана). Поэтому, можно сказать, что учет несовместности уравнений в системах АДУ и УЧП снимает противоречие в подходах к описанию взаимодействия отдельных частиц и их ансамблей с точки зрения проблемы необратимости во времени. Эта необратимость присутствует не только в интегро-дифференциальном уравнение Больцмана, но и в системе уравнений Ньютона для трех и более тел. При выводе из уравнений Больцмана гидродинамических уравнений, в процессе усреднения по достаточно большому ансамблю частиц, «динамическая» неопределенность нивелируется. Также нивелируется аналогичная неопределенность и для большого числа гравитационно связанных между собой тел (например, для звезд в составе галактики).

Вернемся к рассмотрению разложения правой части уравнения Больцмана по малому параметру, обратно пропорциональному числам Кнудсена (с соответствующим расширением фазового пространства).

В первом порядке разложения учитывается слабая неоднородность потока и сдвиговые напряжения, возникающие из-за этого. При этом констатируется, что поиск первого члена разложения происходит вблизи положения равновесия. За основу берется распределение Больцмана по скоростям вблизи равновесного значения скорости потока в локальной области пространства. Поскольку, разложение в первом порядке можно соотнести с производной первой степени по пространственной координате, то этот член в правой части при интегрировании всего уравнения по бесконечному пространству, так же, как и производные в левой части, будет стремиться к нулю на границе области, и его наличие не приведет к расходимости решения.

Можно предположить, что расходимость решения при учете следующего члена разложения по малому параметру, обратно пропорционального числам Кнудсена, возникает из-за нарушения условие нахождения вблизи положения равновесия, когда перестает выполняться требование, что каждый следующий член разложения должен быть меньше предыдущего. А именно, если в какой-то момент времени значение разложения правой части уравнения Больцмана по малому параметру, обратно пропорционального числам Кнудсена, выше первой степени, окажется большим, то это будет соответствовать большему значению пространственной производной - выше первой степени. Из-за наличия таких членов в правой части, при интегрировании всего уравнения по бесконечному пространству, левая часть уравнения на границе будет стремиться к нулю (как и в случае рассмотрения нерасширенного фазового пространства – без параметра, обратного числу Кнудсена), а правая – нет. Поскольку механизма компенсации случайного возрастания второй и последующих производных в «классическое» уравнение Больцмана не заложено, то при выходе из состояния, близкого к равновесию, может произойти расходимость решения на границе, которая будет только увеличиваться со временем.

Между тем, известны и исследованы ситуации, когда дальнодействие молекул и их возможное коллективное «поведение». является преобладающим в системе. Речь идет о плазме, в которой возможна генерация ленгмюровских волн [26]. Как сказано выше, учет дальнодействия с использованием разложения по малому параметру, обратного пропорционального числам Кнудсена, выше первой степени, недопустим – он приводит к расходимости решения на границе. Для описания таких систем используется уравнение Власова, которое получается из уравнения Больцмана, путем «отбрасывания» интеграла столкновения, но с учетом самосогласованного поля сил, возникающих из-за самоорганизующихся процессов в плазме, которые приводят к пространственному и временному перераспределению электронов и ионов:

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f_j}{\partial \vec{x}} - q_j\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v},\vec{B}]\right)\frac{\partial f_j}{\partial \vec{p}} = 0. \qquad (7)$$

Индекс j в уравнении (7) обозначает вид частиц (электронов или ионов) в плазме. Само уравнение (7) замыкается системой уравнений Максвелла. В результате, из-за учета самосогласованности процессов, система приобретает вид интегро-дифференциальных уравнений. В уравнении (7) не присутствуют производные, выше первой степени, поэтому при интегрировании по бесконечному фазовому пространству все члены на границе фазовой области обратятся в ноль, в результате чего удается избежать расходимости решения. Однако, необратимость по времени в такой системе, в любом случае, присутствует из-за интегро-дифференциального вида ***системы*** уравнений ***в целом***. Эта необратимость также имеет «динамическую» природу.

Уравнения Больцмана и Власова можно считать моделями двух предельных процессов, происходящих в больших ансамблях частиц, на разных масштабах рассмотрения. Каждое из них обладает свойством «динамической» неопределенности, необратимости и характеризуется производством «динамической» энтропии.

Можно предположить, что главными источниками производства ***термодинамической*** энтропии являются неучтенные процессы, связанные с перераспределением кинетической энергии при взаимодействии отдельных молекул по их внутренним степеням свободы (колебательным, вращательным), влиянием квантово-механических эффектов внутри молекул и атомов, а также сдвиговые эффекты на границе стенок. Все это делает соударение частиц неупругими. В отличие от производства «динамической» энтропии, производство термодинамической энтропии растет с увеличением в системе числа частиц, поскольку, чем больше частиц в системе, тем больше направленной кинетической энергии может преобразоваться во внутренние степени свободы молекул, атомов и сдвиговые неустойчивости. В результате действия механизмов производства термодинамической энтропии, законы сохранения импульса при соударении частиц перестают выполняться, часть поступательной кинетической энергии молекул преобразуется в другие формы энергии, и в конечном счете, преобразуется в тепловую энергию их броуновского движения.

При рассмотрении системы на макромасштабе за счет большого количества частиц в системе, термодинамическое производство энтропии является практически детерминированным во времени процессом. Если потеря кинетической энергии (за счет преобразования ее в энергию броуновского движения частиц и в соответствующее поддержание температуры) компенсируются поступающей кинетической энергией из вне (или можно сказать по-другому, что внутренние механизмы переработки справляются с поступающей энергией), то система пребывает в состоянии, близком к равновесному, соответствующему Принципу минимума производства энтропии Пригожина.

Стоит упомянуть, что в сжимаемой жидкости могут присутствовать дополнительные источники производства энтропии, связанные с существованием в поле течения ударных волн и контактных разрывов. Их появление приводит систему к новому состоянию равновесия, и поэтому дополнительное производство энтропии в ней соответствует Принципу минимума Пригожина.

Механизмы производства «динамической» энтропии тоже могут вносить свой вклад в общее производство энтропии, но этот вклад будет очень незначительным при рассмотрении в системе большого числа частиц и степеней свободы.

Нахождение системы вблизи положения равновесия и усреднение производства энтропии по большому количеству частиц, позволяет учитывать ее действие интегрально. Именно поэтому, добавление в уравнения Эйлера членов, характеризующих вязкость, и переход к уравнениям Навье-Стокса, вполне корректно описывает процесс перераспределения и компенсации энергии на макроуровне (и обычно позволяет отвлечься от рассмотрения этих вопросов на микро- и нано-уровнях).

Между тем, турбулентный режим реализуется в ситуации, когда компенсационный механизм переработки кинетической энергии за счет термодинамического производства энтропии перестает «справляться» с поступающей в систему кинетической энергией. Он имеет черты стохастического процесса, происходящего и вдали, и вблизи положения равновесия. Чтобы решить проблему его описания, необходимо учесть возможность реализации плотности вероятности в каждый момент времени в каждой точке пространства неединственным образом, что соответствует наличию в системе дополнительного механизма производства энтропии. Этот механизм в модифицированном уравнении Лиувилля (5) и, соответственно, получаемом из него модифицированном уравнении Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m}\nabla f + \vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} + \dot{S}\frac{\partial f}{\partial s} = Stf, \qquad (8)$$

описывается последним членом в левой части уравнения (8). Интеграл столкновения в уравнении (8) остается таким же, как и в «классическом» уравнении Больцмана (6).

Введя обозначение: $dS/dt=1/\tau$, где τ – временной масштаб, на котором энтропия изменяется на единицу, уравнение (8) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m}\nabla f + \vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial f}{\partial s} = Stf, \qquad (9)$$

Уравнение (9) допускает два решения: первое из которых соответствует «классическому» уравнению Больцмана (в этом случае τ стремиться к бесконечности, что означает, что механизм дополнительного производства энтропии «не работает»), второе – соответствует случаю конечного значения τ - «включению» механизма дополнительного производства энтропии за счет неединственной реализации плотности вероятности в каждый момент времени, когда система уходит из состояния, близкого к равновесию.

Значение τ может уменьшаться при удалении системы от положения равновесия, когда в стохастический процесс вовлекаются все меньшие и меньшие масштабы, последнее слагаемое в левой части уравнения (9) при этом растет, что отражает Принцип максимума производства энтропии.

В работе [18] на основе уравнения (9) приводится вывод «модифицированной» системы уравнений Навье-Стокса (МУНС) для жидкости, в которой сжимаемость считается малой, и поэтому вторая вязкость в уравнении импульса не учитывается:

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial \cancel{s}} + \nabla\left(\rho\vec{V}\right) = 0 \\ \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial\vec{V}}{\partial \cancel{s}} + \left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} = \frac{-1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\vec{V} \end{cases}. \tag{10}$$

В качестве решений системы уравнений (10) выступают значения скорости $\vec{V} = \vec{V}(t,\vec{r},\cancel{s};\tau) = \vec{V}(t,\vec{r},\cancel{s}(\varphi);\tau)$ и плотности $\rho = \rho(t,\vec{r},\cancel{s};\tau) = \rho(t,\vec{r},\cancel{s}(\varphi);\tau)$, которые могут реализоваться с вероятностью φ (на временном масштабе производства энтропии τ) в момент времени t, в точке $\vec{r}(x,y,z)$.

Дополнительный член в уравнении неразрывности на больших интервалах времени в турбулентном режиме описывает «сглаживание» - уменьшение изменения плотности (из-за возбуждения стохастических возмущений и связанного с ними роста энтропии), например, в волновых процессах или в процессах, характеризуемых возникновением ударных волн.

Система (10) может быть также записана в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial\cancel{\rho}}{\partial \cancel{t}} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial\cancel{\rho}}{\partial \cancel{s}} + \cancel{\nabla}\left(\cancel{\rho}\vec{\cancel{V}}\right) = 0 \\ \frac{\partial\vec{\cancel{V}}}{\partial \cancel{t}} + \gamma\frac{\partial\vec{\cancel{V}}}{\partial \cancel{s}} + \left(\vec{\cancel{V}}\cancel{\nabla}\right)\vec{\cancel{V}} = \frac{-1}{\cancel{\rho}}\cancel{\nabla}\cancel{P} + \frac{1}{\Re}\cancel{\Delta}\vec{\cancel{V}} \end{cases}, \tag{11}$$

где $\vec{\cancel{V}} = \vec{V}/U$ - безразмерная скорость в расширенном стохастическом пространстве с дополнительной переменной $\cancel{s}$, U – максимальная скорость течения жидкости для данной пространственной геометрии при ламинарном режиме течения, $\cancel{\nabla} = \vec{\imath}\,\partial/\partial\cancel{x} + \vec{\jmath}\,\partial/\partial\cancel{y} + \vec{k}\,\partial/\partial\cancel{z}$, $\cancel{\Delta} = \partial^2/\partial\cancel{x}^2 + \partial^2/\partial\cancel{y}^2 + \partial^2/\partial\cancel{z}^2$, $\cancel{x} = x/b$, $\cancel{y} = y/b$, $\cancel{z} = z/b$, $\cancel{t} = tU/b$, b – характерный размер пространственной области течения жидкости, $\cancel{\rho} = \rho/\rho_0$, ρ_0 – невозмущенная плотность жидкости $(|\rho'/\rho_0| = |\rho/\rho_0 - 1| \ll 1)$, $\cancel{P} = P/(\rho_0 U^2)$ - безразмерное давление, $Re=Ub/\nu$ - число Рейнольдса для данной геометрии при ламинарном режиме течения жидкости.

Модифицированные таким образом уравнения Навье-Стокса позволяют описывать оба режима течения жидкости: как ламинарный, так и турбулентный. В турбулентном режиме, когда дополнительное (по сравнению с ламинарным) производство энтропии ненулевое, в качестве решения получаются характеристики течения (например, скорость), зависящие, не только от времени и координат, но также от дополнительной стохастической переменной, характеризующей вероятность реализации данного значения.

При больших числах Рейнольдса вязкий член во втором уравнении системы (11) стремится к нулю (за исключением локальных областей вблизи стенок, где из-за граничных условий реализуются большие градиенты скорости), но при этом диссипация в системе только усиливается за счет увеличении роли дополнительного члена в левой части модифицированного УНС.

В работах [19-21] были аналитически получены «ламинарные» и обобщенные «турбулентные» решения МУНС для течения несжимаемой нетеплопроводной жидкости в квазистационарной постановке в классических задачах гидродинамики: в задаче Хагена-Пуазейля, в плоской задаче Куэтта и в плоской задаче Пуазейля.

Перечисленные решения найдены с использованием «модифицированных» уравнений Навье-Стокса, учитывающих дополнительное производство энтропии для турбулентного режима течения, по сравнению с ламинарным.

В данной работе удалось показать, что в вопросе описания диссипативных систем принципиальный характер имеет учет не только количественного, но и качественного характера производства энтропии. А именно, очень важно, чтобы уравнения, описывающие процессы, происходящие в диссипативных системах, могли характеризовать и производство энтропии вблизи положения равновесия (соответствующие Принципу минимума производства энтропии Пригожина), и производство энтропии вдали от положения равновесия (соответствующие Принципу максимума минимума производства энтропии Циглера). Учет обоих этих принципов дает возможность построить модель на основе уравнений, решения которых, с одной стороны, не расходятся, а с другой стороны, позволяют описывать принципиально разные режимы, реализующиеся в некоторых диапазонах изменения параметров.

Заключение

В работе показано, что основной причиной производства энтропии в уравнении Больцмана (H-теорема), является «динамическая» неопределенность, являющаяся одновременно и вычислительной, и физической.

Если говорить о корректности (или некорректности) перехода от описания взаимодействия отдельных частиц с помощью уравнений Ньютона к кинетическому подходу описания ансамбля частиц с помощью уравнений Лиувилля или Больцмана (задача поставлена в шестой проблеме Гильберта), можно отметить следующее: в системе уравнений для задачи трех и более тел присутствует «динамическая» неопределенность, возникающая из-за несовместности уравнений, аналогичная той, которая характерна для систем АДУ, УЧП и интегро-дифференциальных уравнений, в том числе, и для уравнений Лиувилля и Больцмана. И в этом смысле, нет противоречия при переходе от описания взаимодействия отдельных частиц к их ансамблю. Доказанное Н-теоремой производство энтропии в уравнении Больцмана является результатом «перемешивания» отдельных траекторий, возникающее из-за несовместности уравнений, из которых оно получено. Аналогичные эффекты будут проявляться и при описании взаимодействия отдельных частиц.

При выводе из уравнений Больцмана гидродинамических уравнений, в процессе усреднения по конечному объему (достаточно большому ансамблю частиц), «динамическая» неопределенность нивелируется. Однако, аналогичное нивелирование «динамической» неопределенности происходит при увеличении в системе количества гравитационно связанных тел (система из трех тел является наименее устойчивой).

Производство «динамической» энтропии в уравнении Больцмана подчиняется Принципу минимума производства энтропии Пригожина.

Главными источниками производства ***термодинамической*** энтропии являются неучтенные процессы, связанные с перераспределением кинетической энергии при взаимодействии отдельных молекул по их внутренним степеням свободы (колебательным, вращательным), влиянием квантово-механических эффектов внутри молекул и атомов, а также сдвиговые эффекты на границе стенок. Все это делает соударение частиц неупругими, часть поступательной кинетической энергии молекул преобразуется в другие формы энергии, и в конечном счете, преобразуется в тепловую энергию броуновского движения молекул. Производство термодинамической энтропии подчиняется Принципу минимума производства энтропии Пригожина.

Для корректного описания диссипативных систем принципиальным вопросом является возможность с помощью уравнений описывать не только количество производимой в системе энтропии, но и различный характер ее производства. А именно, очень важно, чтобы уравнения, описывающие процессы, происходящие в диссипативных системах, могли характеризовать и производство энтропии вблизи положения равновесия (соответствующее Принципу минимума), и производство энтропии вдали от положения равновесия (соответствующие Принципу максимума).

Исследование двух режимов течения позволяет сказать, что ламинарный режим соответствует процессу, находящемуся вблизи положения равновесия (и характеризуется Принципом минимума производства энтропии Пригожина), а турбулентный – вдали от него (и характеризуется Принципом максимума производства энтропии Циглера). На кинетическом уровне описания это означает, что для турбулентного режима характерно сильное влияние редких событий, приводящих к тому, что в каждый момент времени плотности вероятности реализации случайной величины (например, скорости) могут реализовываться неединственным образом.

Учет различного характера производства энтропии, начиная уже с записи уравнения Лиувилля, позволяет последовательно перейти к «модифицированному» уравнению Больцмана и «модифицированной» системе уравнений Навье-Стокса, что дает возможность описывать как ламинарные, так и турбулентные режимы течения на основе одних и тех же уравнений. В результате удается аналитически определить «ламинарные» и обобщенные «турбулентные» решения для классических задач гидродинамики.

Список источников

1. Мартюшев Л.М. Принцип максимума производства энтропии: история возникновения и современное состояние // Успехи физических наук. 2021. Том 191, №6. С. 586-613.

2. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Т.X. Физическая кинетика. М.: Наука, 2002. 536 с.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.VI. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. - 731 с.

4. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. Simulation of flow around aerofoil with DES model of turbulence // Труды МАИ. 2012. № 59. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=34840

5. Dauchot O., Daviaud F. Finite-amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow // Physics of Fluids, 1995, no. 7, pp. 335-343. DOI: 10.1209/0295-5075/28/4/002

6. Orszag Steven A., Kells Lawrence C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow // Journal of Fluid Mechanics, 1980, no. 96, pp. 59-205. DOI: 10.1017/S0022112080002066

7. Menter F.R. Zonal two equation k-w turbulence models for aerodynamic flows // AIAA Paper, 1993, N93-2906, pp. 21. DOI: 10.2514/6.1993-2906

8. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., and Zhu J. A New k-e Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows – Model Developmentand Validation // Computers Fluids, 1995, vol. 24, no. 3, pp. 227-238.

9. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure // Journal of Fluid Mechanics, April 1975, vol. 68, no. 3, pp. 537-566. DOI: 10.1017/S0022112075001814

10. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulation // International Journal of Heat and Fluid Flow, 2000, vol. 21, no. 3, pp. 252-263. DOI: 10.1016/S0142-727X(00)00007-2

11. Березко М.Э., Никитченко Ю.А. Сравнение комбинированных кинетическо-гидродинамических моделей различных порядков на примере течения Куэтта // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=112842. DOI: 10.34759/trd-2020-110-8

12. Никитченко Ю.А. Моментные модели для течения с большим числом Маха // Вестник Московского авиационного института. 2014. Т. 21. № 4. С. 39-48.

13. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique // Physics of Fluids, 1992, vol. 4, no. 7, pp. 510–520. DOI: 10.1063/1.858424

14. Шелест А.В. Метод Боголюбова в динамической теории кинетических уравнений. - М.: Наука, 1990. - 159 с.

15. Кравчук М.О., Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В. Вопросы моделирования турбулентности для расчета сверхзвуковых высокотемпературных струй // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=58536

16. Никитченко Ю.А., Березко М.Э., Красавин Е.Э. Сравнение модели Навье-Стокса-Фурье и двухтемпературной модели на примере задачи обтекания поверхности большой кривизны // Труды МАИ. 2023. № 131. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=175915

17. Нгуен Т.Т., Сбоев Д.С., Ткаченко В.В. Перемежаемость в пограничном слое при повышенной внешней турбулентности // Труды МФТИ. 2020. Т.12, № 3. С.150-162

18. Хатунцева О.Н. Учет производства энтропии в уравнении Лиувилля и вывод из него «модифицированной» системы уравнений Навье-Стокса // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=178465.

19. Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения задачи Хагена-Пуазейля для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. 2021.

№ 118. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=158211. DOI: 10.34759/trd-2021-118-02

20. Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения плоской задачи Куэтта для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. 2022. № 122. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=164194. DOI: 10.34759/trd-2022-122-07

21. Хатунцева О.Н. Обобщенное аналитическое решение плоской задачи Пуазейля для турбулентного режима течения несжимаемой жидкости // Труды МАИ. 2022. № 123. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=165492. DOI: 10.34759/trd-2022-123-08

22. Хатунцева О.Н. О механизме возникновения в стохастических процессах гауссовских распределений случайной величины с "тяжелыми" степенными "хвостами" // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=98854

23. Хатунцева О.Н. О "классических" и "квантовых" пределах при интегрировании системы автономных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2024. № 1. https://doi.org/10.21638/11701/spbu35.2024.104

24. Хатунцева О.Н. О «детерминизации» стохастических процессов при увеличении в системе степеней свободы // Труды МАИ. 2022. № 128. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=171388 DOI: 10.34759/trd-2023-128-07

25. Пчелинцев А.Н. Численное и физическое моделирование динамики системы Лоренца // Сибирский журнал вычислительной математики. 2014. Т. 17. № 2. С. 191 – 201.

26. Merrill H.J., Webb H.W. Electron Scattering and Plasma Oscillations // Physical Review: journal. 1939. Vol. 55, no. 12.P. 1191. doi:10.1103/PhysRev.55.1191

References

1. Martyushev L.M. Maximum entropy production principle: history and current status // Physics-Uspekhi 64 (6) (2021) DOI: https://doi.org/10.3367/UFNe.2020.08.038819

2. Lifshits E.M., Pitaevsky L.P. Physical kinetics, 2002, vol.10, M.: Butterworth-Heinemann, 536 p.

3. Landau L.D., Lifshits E.M. *Fluid Mechanics*, Butterworth-Heinemann, 1987, vol. 6, 558 p.

4. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. Simulation of flow around aerofoil with DES model of turbulence, *Trudy MAI*, 2012, no. 59. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34840

5. Dauchot O., Daviaud F. Finite-amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow, *Physics of Fluids*, 1995, no. 7, pp. 335-343. DOI: 10.1209/0295-5075/28/4/002

6. Orszag Steven A., Kells Lawrence C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 1980, no. 96, pp. 59-205. DOI: 10.1017/S0022112080002066

7. Menter F.R. Zonal two equation k-w turbulence models for aerodynamic flows, *AIAA Paper*, 1993, N93-2906, pp. 21. DOI: 10.2514/6.1993-2906

8. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., and Zhu J. A New k-e Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows – Model Developmentand Validation, *Computers Fluids*, 1995, vol. 24, no. 3, pp. 227-238.

9. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure, *Journal of Fluid Mechanics*, April 1975, vol. 68, no. 3, pp. 537-566. DOI: 10.1017/S0022112075001814

10. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulation, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2000, vol. 21, no. 3, pp. 252-263. DOI: 10.1016/S0142-727X(00)00007-2

11. Berezko M.E., Nikitchenko Yu.A. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112842. DOI: 10.34759/trd-2020-110-8

12. Nikitchenko Yu.A. *Aerospace MAI Journal*, 2014, vol. 21, no. 4, pp. 39-48.

13. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique, *Physics of Fluids*, 1992, vol. 4, no. 7, pp. 510–520. DOI: 10.1063/1.858424

14. Shelest A.V. *Metod Bogolyubova v dinamicheskoi teorii kineticheskikh uravnenii* (Bogolyubov's method in the dynamic theory of kinetic equations), Moscow, Nauka, 1990, 159 p.

15. Kravchuk M.O., Kudimov N.F., Safronov A.V. *Trudy MAI*, 2015, no. 82. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58536

16. Nikitchenko Y. A., Berezko M. E., Krasavin E. E. *Trudy MAI*, 2023, no. 131. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=175915

17. Nguyen T.T., Sboev D.S., Tkachenko V.V., *Trudy MFTI*, 2020, V. 12, no. 3. pp. 150-162

18. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2024, no. 134. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=178465.

19. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2021, no. 118. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=158211. DOI: 10.34759/trd-2021-118-02

20. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2022, no. 122. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=164194. DOI: 10.34759/trd-2022-122-07

21. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2022, no. 123. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=165492. DOI: 10.34759/trd-2022-123-08

22. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 102. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=98854

23. Khatuntseva O.N. Differential Equations and Control Processes, 2024, no. 1. https://doi.org/10.21638/11701/spbu35.2024.104

24. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2023, no. 128. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=171388. DOI: 10.34759/trd-2023-128-07

25. Pchelintsev A.N. Numer. Analys, 2014, no. 7, https://doi.org/10.1134/S1995423914020098

26. Merrill H.J., Webb H.W Physical Review journal. 1939. Vol. 55, no. 12. doi:10.1103/PhysRev.55.1191