Труды МАИ. 2025. № 142
Trudy MAI. 2025. No. 142. (In Russ.)

МЕХАНИКА

Научная статья
УДК 67.05
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=185097
EDN: https://www.elibrary.ru/DXAVVI

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ РАБОТЫ ЖИДКОСТНОГО РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ ПУТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ ДАВЛЕНИЙ НАДДУВА БАКОВ ОКИСЛИТЕЛЯ И ГОРЮЧЕГО

Фарит Давлетович Байрамов[1], Булат Фаритович Байрамов[2]✉

[1,2]Набережночелнинский институт (филиал) Казанского (Приволжского) федерального университета, Набережные Челны, Республика Татарстан

[1]fdbairamov@mail.ru

[2]bfbairamov@mail.ru✉

Аннотация. Методом функций Ляпунова решается задача оптимальной стабилизации установившегося режима работы двухкомпонентного жидкостного ракетного двигателя (ЖРД) с турбонасосным агрегатом (ТНА). Рассмотрены вопросы математического моделирования, обеспечения асимптотической устойчивости работы ЖРД путём регулирования давлений в баках окислителя и горючего с учётом волновых процессов в расходных магистралях. Построены оптимальные законы регулирования давлений в баках из условия наименьшего значения нормы в каждый момент времени и законы регулирования давлений в системе наддува, реализующие изменение давлений в баках по этим оптимальным законам.

Ключевые слова: двухкомпонентный ЖРД, уравнения динамики, анализ асимптотической устойчивости методом функций Ляпунова, оптимальные законы

регулирования давлений в баках окислителя и горючего, законы регулирования давлений в системе наддува баков

Для цитирования: Байрамов Ф.Д., Байрамов Б.Ф. Оптимальная стабилизация работы жидкостного ракетного двигателя путем регулирования давлений наддува баков окислителя и горючего // Труды МАИ. 2025. № 142. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=185097

MECHANICS

Original article

OPTIMAL STABILIZATION OF OPERATION OF LIQUID-PROPELLANT ROCKET ENGINE BY REGULATING THE OXIDIZER AND FUEL TANKS PRESSURIZATION PRESSURES

Farit D. Bairamov[1], Bulat F. Bairamov[2]✉

[1,2]Naberezhnye Chelny Institute of Kazan Federal University,

Kazan, Republic of Tatarstan

[1]fdbairamov@mail.ru

[2]bfbairamov@mail.ru✉

Abstract. The Lyapunov function method is applied to solve the problem on optimal stabilization of the steady-state mode of operation of the two-component liquid-propellant rocket engine with turbo-driven pump assembly by regulating the pressures in the oxidizer and fuel tanks with considering wave processes in the flow lines. Liquid-propellant rocket engine is a complex mechanical system containing two distributed links and finite-dimensional links located at both endpoints of the distributed links. The linearized equations

of dynamics of separate links are drawn up. After an exception of some variables from these equations system of dynamic equations of liquid-propellant rocket engine in general have been obtained. To solve the problem on stabilization, first, the Lyapunov function method is used to determine the set of controls (laws for regulating the pressures in tanks) ensuring asymptotic stability of liquid-propellant rocket engine operation. Then, the optimal control is determined on this set by the Lagrange function method from the condition for minimum of the norm at each moment of time. Based on specific equations, the Lyapunov function is constructed as the sum of integral and ordinary quadratic forms, the sign-definiteness of which is checked by the Sylvester criterion. The developed control laws can be implemented quite simply and accurately in practice. It is not possible to ensure the asymptotic stability of liquid-propellant rocket engine operation without regulating the pressures in the tanks. The liquid-propellant rocket engine belongs to the class of systems with distributed and lumped parameters, described by linear equations in partial and ordinary derivatives. Some equations of dynamics of liquid-propellant rocket engine do not contain time derivatives. The methodology of synthesis of optimal controls with the smallest value of the norm at each moment of time in systems with distributed and lumped parameters, some equations of which do not contain time derivatives, has been developed. The need for such control arises, for example, when determining the boost pressure in the hydraulic tanks of the hydraulic system; when determining the boost pressure of the fuel tank, which ensures stable operation of the heating furnace. The developed methodology can also be used to study stability of such systems. For example, when studying the stability of operation of a rotary-type wind turbine with a vertical axis of rotation together with a pump. The shaft that transmits the torque of the wind turbine to the pump has a considerable length, so the problem is solved, taking into account the elasticity of this shaft.

Keywords: two-component liquid-propellant rocket engine, equations of dynamics, analysis of asymptotic stability by the Lyapunov function method, optimal laws for regulating the pressures in the oxidizer and fuel tanks, laws for regulating the pressures in the pressurization system of tanks

For citation: Bairamov F.D., Bairamov B.F. Optimal stabilization of operation of liquid-propellant rocket engine by regulating the oxidizer and fuel tanks pressurization pressures. *Trudy MAI*. 2025. No. 142. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=185097

Введение

Непременным условием работоспособности ЖРД является обеспечение его устойчивости. Устойчивость отдельных агрегатов ЖРД и их систем рассматривалась в ряде работ [1 – 5]. При исследовании устойчивости совместной работы камеры сгорания и системы подачи топлива обычно пользуются линеаризованными уравнениями динамики и известными методами теории автоматического регулирования. В данной работе для анализа устойчивости ЖРД применяется метод функций Ляпунова, который позволяет рассматривать более полные модели двигательной установки с учётом волновых процессов в расходной магистрали. ЖРД представляет собой довольно сложную механическую систему, содержащую одно распределённое звено (расходная магистраль), на обоих концах которого расположены конечномерные звенья. Метод функций Ляпунова является одним из основных методов исследования устойчивости и синтеза управлений в таких системах с распределёнными и сосредоточенными параметрами. Имеются достаточно полные обзоры проблем в этой области [4 – 15]. Наряду с теоретическими исследованиями методом функций Ляпунова проводились исследования конкретных объектов, например, устойчивости химических реакторов [5], устойчивости гидравлической системы с ветронасосным агрегатом [16], обеспечения устойчивой работы нагревательной печи [9] путём регулирования давления наддува бака топлива, устойчивости работы ветронасосного агрегата при учёте упругости вала, передающего крутящий момент от ветряного двигателя насосу [8], технической устойчивости работы ЖРД [17], устойчивости однокомпонентного ЖРД с вытеснительной системой подачи топлива с учётом первого тона продольных колебаний корпуса ракеты [18], и т.д.

В данной статье также методом функций Ляпунова решается задача обеспечения асимптотической устойчивости работы ЖРД путём регулирования давлений наддува баков окислителя и горючего.

Уравнения динамики звеньев ЖРД

Рассмотрим двухкомпонентный ЖРД с ТНА и газогенератором, работающим на унитарном саморазлагающемся топливе. Приведём линеаризованные уравнения динамики отдельных звеньев ЖРД в относительных отклонениях от расчётного (установившегося) режима работы в безразмерном виде [3 – 5].

Уравнение камеры сгорания (без учёта запаздывания горения):

$$\theta_{\text{К}} \frac{dp_{\text{К}}}{dt} + p_{\text{К}} = k_1 g_0 + k_2 g_{\Gamma}, \tag{1}$$

где $p_{\text{К}} = \dfrac{P_{\text{К}} - P_{\text{К}}^*}{P_{\text{К}}^*}$, $g_0 = \dfrac{G_0 - G_0^*}{G_0^*}$, $g_{\Gamma} = \dfrac{G_{\Gamma} - G_{\Gamma}^*}{G_{\Gamma}^*}$; $P_{\text{К}}$ – давление в камере сгорания; G_0, G_{Γ} – массовые расходы окислителя и горючего в камеру; $\theta_{\text{К}}$ – постоянная времени камеры сгорания; k_1, k_2 – положительные безразмерные коэффициенты усиления.

Здесь и далее верхним индексом $(*)$ отмечены номинальные значения переменных для расчётного режима работы двигателя, а нижними индексами (0) и (Г) – параметры магистралей окислителя и горючего соответственно.

Уравнения напорных магистралей. С учётом сопротивлений форсуночной головки и тракта охлаждения уравнения напорных магистралей запишутся в виде

$$\begin{aligned} T_0 \frac{dg_0}{dt} &= -k_3 g_0 - p_{\text{К}} + p_0, \\ T_{\Gamma} \frac{dg_{\Gamma}}{dt} &= -k_4 g_{\Gamma} - p_{\text{К}} + p_{\Gamma}, \end{aligned} \qquad (2)$$

где $g_0 = \dfrac{G_0 - G_0^*}{G_0^*}$, $g_{\Gamma} = \dfrac{G_{\Gamma} - G_{\Gamma}^*}{G_{\Gamma}^*}$, $p_0 = \dfrac{P_0 - P_0^*}{P_{\text{К}}^*}$, $p_{\Gamma} = \dfrac{P_{\Gamma} - P_{\Gamma}^*}{P_{\text{К}}^*}$; P_0, P_{Γ} – давления на выходе из насосов; G_0, G_{Γ} – расходы компонентов топлива через напорные магистрали; T_0, T_{Γ} – постоянные времени; k_3, k_4 – положительные безразмерные коэффициенты усиления.

Уравнения насосных агрегатов:

$$\begin{aligned} p_0 &= p_{\text{ВХ.0}} - k_5 g_0 + k_6 n, \\ p_{\Gamma} &= p_{\text{ВХ.Г}} - k_7 g_{\Gamma} + k_8 n, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $p_{\text{ВХ.0}} = \dfrac{P_{\text{ВХ.0}} - P^*_{\text{ВХ.0}}}{P^*_{\text{К}}}$, $p_{\text{ВХ.Г}} = \dfrac{P_{\text{ВХ.Г}} - P^*_{\text{ВХ.Г}}}{P^*_{\text{К}}}$, $n = \dfrac{N - N^*}{N^*}$; $P_{\text{ВХ.0}}$, $P_{\text{ВХ.Г}}$ – давления на входе в насосы; N – число оборотов вала турбонасосного агрегата в минуту; k_5, … , k_8 – положительные безразмерные коэффициенты усиления насосов.

Уравнение ротора ТНА:

$$T_{\text{ТР}} \frac{dn}{dt} = -n - k_9 g_0 - k_{10} g_{\text{Г}} + k_{11} p_{\text{ГГ}} - k_{12}\left(p_0 - p_{\text{ВХ.0}}\right) - k_{13}\left(p_{\text{Г}} - p_{\text{ВХ.Г}}\right), \qquad (4)$$

где $p_{\text{ГГ}} = \dfrac{P_{\text{ГГ}} - P^*_{\text{ГГ}}}{P^*_{\text{ГГ}}}$; $P_{\text{ГГ}}$ – давление в газогенераторе; $T_{\text{ТР}}$ – постоянная времени ТНА; k_9, … , k_{13} – безразмерные коэффициенты усиления ТНА.

Уравнение газогенератора. Газогенератор, работающий на однокомпонентном топливе, состоит из форсуночной головки, пакета с катализатором и камеры разложения. Часто форсуночную головку и пакет катализатора рассматривают как единый элемент с сосредоточенным сопротивлением и газогенератор представляют двумя звеньями: камерой разложения и форсуночной головкой с пакетом катализатора. Уравнения этих звеньев (без учёта запаздывания процесса саморазложения топлива):

$$\begin{aligned} \theta_{\text{Г}} \frac{dp_{\text{ГГ}}}{dt} &= -p_{\text{ГГ}} + g_{\text{ГГ}}, \\ g_{\text{ГГ}} &= k_{14}\left(p_{\text{ФГ}} - p_{\text{ГГ}}\right), \end{aligned} \qquad (5)$$

где $g_{\text{ГГ}} = \dfrac{G_{\text{ГГ}} - G^*_{\text{ГГ}}}{G^*_{\text{ГГ}}}$, $p_{\text{ФГ}} = \dfrac{P_{\text{ФГ}} - P^*_{\text{ФГ}}}{P^*_{\text{ГГ}}}$; $G_{\text{ГГ}}$ – расход топлива газогенератора; $P_{\text{ФГ}}$ – давление топлива газогенератора перед его головкой, $\theta_{\text{Г}}$ – постоянная времени камеры разложения; k_{14} – безразмерный коэффициент усиления.

Уравнение дроссельного крана, регулирующего расход топлива газогенератора (считается, что давление в баке топлива газогенератора и площадь открытия крана поддерживаются на расчётном уровне):

$$p_{ФГ} = -k_{15} g_{ГГ}, \tag{6}$$

где k_{15} – безразмерный коэффициент усиления.

Конкретные выражения постоянных времени и безразмерных коэффициентов усиления звеньев имеются в работе [4].

Уравнения расходных магистралей. Расходные магистрали состоят из сравнительно длинных трубопроводов небольшой жёсткости. Длины волн колебаний в этих магистралях сравнимы с длинами трубопроводов, поэтому здесь необходимо учитывать распределённый характер течения компонентов топлива.

Движение компонентов топлива в расходных магистралях описывается уравнениями Жуковского [19]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial p_0(x_1,t)}{\partial t} = -a_1 \frac{\partial g_0(x_1,t)}{\partial x_1}, \\
\frac{\partial g_0(x_1,t)}{\partial t} = -b_1 \frac{\partial p_0(x_1,t)}{\partial x_1}, \\
x_1 \in (0,1), \qquad (7) \\
\frac{\partial p_Г(x_2,t)}{\partial t} = -a_2 \frac{\partial g_Г(x_2,t)}{\partial x_2}, \\
\frac{\partial g_Г(x_2,t)}{\partial t} = -b_2 \frac{\partial p_Г(x_2,t)}{\partial x_2}, \\
x_2 \in (0,1),
\end{gathered}$$

где $p(x,t)=\dfrac{P(x,t)-P^*}{P_{\text{К}}^*}$, $g(x,t)=\dfrac{G(x,t)-G^*}{G^*}$, $a_1=\dfrac{a_0^2G_0^*}{P_{\text{К}}^*F_0L_0}$, $a_2=\dfrac{a_{\Gamma}^2G_{\Gamma}^*}{P_{\text{К}}^*F_{\Gamma}L_{\Gamma}}$, $b_1=\dfrac{P_{\text{К}}^*F_0}{G_0^*L_0}$,

$b_2=\dfrac{P_{\text{К}}^*F_{\Gamma}}{G_{\Gamma}^*L_{\Gamma}}$, $x_1=\dfrac{x_0}{L_0}$, $x_2=\dfrac{x_{\Gamma}}{L_{\Gamma}}$; $P_0(x_1,t)$, $P_{\Gamma}(x_2,t)$, $G_0(x_1,t)$, $G_{\Gamma}(x_2,t)$ – давления и расходы компонентов в расходных магистралях; x_0, x_{Γ} – координаты поперечных сечений магистралей, отсчитываемые от баков; F_0, F_{Γ}, L_0, L_{Γ} – площади поперечного сечения и длины магистралей; a_0, a_{Γ} – скорости звука в окислителе и горючем.

Граничные условия при $x_1=x_2=0$:

$$p_0(0,t)=u_1,\quad p_{\Gamma}(0,t)=u_2, \tag{8}$$

где u_1, u_2 – относительные отклонения давлений в баках окислителя и горючего соответственно.

Граничные условия при $x_1=x_2=1$:

$$\begin{aligned} p_0(1,t)&=p_{\text{ВХ.0}}(t),\quad g_0(1,t)=g_0(t),\\ p_{\Gamma}(1,t)&=p_{\text{ВХ.Г}}(t),\quad g_{\Gamma}(1,t)=g_{\Gamma}(t), \end{aligned} \tag{9}$$

где $p_{\text{ВХ.0}}(t)$, $p_{\text{ВХ.Г}}(t)$ – относительные отклонения давлений перед входом в насосы.

Исключая переменные $p_{\text{ВХ.0}}$, $p_{\text{ВХ.Г}}$, p_0, p_{Γ}, $g_{\Gamma\Gamma}$, $p_{\Phi\Gamma}$ и вводя векторы

$$z=\left(p_{\text{К}},g_0,g_{\Gamma},n,p_{\Gamma\Gamma}\right)^{\text{T}},$$

$$\varphi_1=\varphi_1(x_1,t)=\left(p_0(x_1,t),g_0(x_1,t)\right)^{\text{T}},$$

$$\varphi_2=\varphi_2(x_2,t)=\left(p_{\Gamma}(x_2,t),g_{\Gamma}(x_2,t)\right)^{\text{T}},$$

Уравнения (1) – (9) запишем в матричной форме:

$$\frac{\partial \varphi_S}{\partial t} = A_S \frac{\partial \varphi_S}{\partial x_S}, \quad x_S \in (0,1),$$

$$\frac{dz}{dt} = B_0 z + \sum_{S=1}^{2} B_S \varphi(1,t), \tag{10}$$

$$\Gamma_0 \varphi_S(0,t) = G u_S, \quad \Gamma_1 \varphi_S(1,t) = \Gamma_{2S} z, \quad s = \overline{1,2},$$

где $A_S = \begin{bmatrix} 0 & -a_S \\ -b_S & 0 \end{bmatrix}$, $B_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\theta_К} & \frac{k_1}{\theta_К} & \frac{k_2}{\theta_К} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{T_0} & -\frac{k_3+k_5}{T_0} & 0 & \frac{k_6}{T_0} & 0 \\ -\frac{1}{T_Г} & -\frac{k_4+k_7}{T_Г} & 0 & \frac{k_8}{T_Г} & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma_3}{T_{ТР}} & -\frac{\gamma_4}{T_{ТР}} & -\frac{\gamma_1}{T_{ТР}} & \frac{k_{11}}{T_{ТР}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma_2}{\theta_Г \gamma_5} \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{T_0} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{T_Г} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Gamma_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Gamma_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\gamma_1 = 1 + k_6 k_{12} + k_8 k_{13}$, $\gamma_2 = 1 + k_{14} k_{15} + k_{14}$, $\gamma_3 = k_9 - k_5 k_{12}$,

$\gamma_4 = k_{10} - k_7 k_{13}$, $\gamma_5 = 1 + k_{14} k_{15}$.

В уравнениях (10) и далее индекс $S = 1$ соответствует магистрали окислителя, а $S = 2$ – горючего.

Расчётному режиму работы ЖРД соответствует решение $\varphi_S = z = 0$, которое система (10) имеет при $u_S = 0$.

Введём норму $\rho_S = \int\limits_0^1 \varphi_S^{\mathrm{T}} \varphi_S dx_S$, характеризующую возмущённое состояние распределённых звеньев.

Ставится следующая **задача** об оптимальной стабилизации. Требуется найти законы $u_{SO}(t)$ регулирования давлений в баках окислителя и горючего с наименьшим значением нормы $\sum\limits_{S=1}^{2} u_S^2$ в каждый момент времени, обеспечивающие асимптотическую устойчивость системы (1) – (9) по переменным z, ρ_S.

Решение задачи

Для решения задачи рассмотрим функцию Ляпунова в виде суммы интегральной и обычной квадратичных форм

$$V = \sum_{S=1}^{2} V_S + V_0, \quad V_S = \int\limits_0^1 \varphi_S^{\mathrm{T}} \nu^{(S)}(x_S) \varphi_S dx_S, \quad V_0 = z^{\mathrm{T}} Q z, \tag{11}$$

где $\nu^{(S)}(x_S)$, Q – симметричные матрицы, подлежащие построению: матрица Q – постоянная, а элементы матриц $\nu^{(S)}(x_S)$ – ограниченные дифференцируемые функции.

Найдём производную функционала V. В силу первых двух уравнений (10) она равна

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{S=1}^{2} \left[\int\limits_0^1 \varphi_S^{\mathrm{T}} \nu^{(S)}(x_S) A_S \frac{\partial \varphi_S}{\partial x_S} + \frac{\partial \varphi_S^{\mathrm{T}}}{\partial x_S} A_S^{\mathrm{T}} \nu^{(S)}(x_S) \varphi_S + 2\varphi_S^{\mathrm{T}}(1,t) B_S^{\mathrm{T}} Q z \right] +$$

$$+z^{\mathrm{T}}\left(QB_0+B_0^{\mathrm{T}}Q\right)z. \tag{12}$$

Выполним интегрирование по частям и потребуем, чтобы элементы матриц $\nu^{(S)}(x_S)$ удовлетворяли условиям

$$a_S\nu_{11}^{(S)}(x_S)=b_S\nu_{22}^{(S)}(x_S), \quad \nu A_S=A_S^{\mathrm{T}}\nu. \tag{13}$$

Тогда производная (12) принимает вид

$$\frac{dV}{dt}=-\sum_{S=1}^{2}\left[\int_0^1-\varphi_S^{\mathrm{T}}\frac{d\nu^{(S)}(x_S)A_S}{dx_S}\varphi_S dx_S+2\varphi_S^{\mathrm{T}}(1,t)B_S^{\mathrm{T}}Q+z^{\mathrm{T}}\left(QB_0+B_0^{\mathrm{T}}Q\right)z+\right.$$

$$\left.+\varphi_S^{\mathrm{T}}(1,t)\nu^{(S)}(1)A_S\varphi_S(1,t)-\varphi_S^{\mathrm{T}}(0,t)\nu^{(S)}(0)A_S\varphi_S(0,t)\right]. \tag{14}$$

В двух последних слагаемых (14) функции $\varphi_S(1,t)$ и $\varphi_S(0,t)$ заменим выражениями соответственно $T_1\varphi_S(1,t)=\Gamma_{2S}z$ и $T_0\varphi_S(0,t)=Gu_S$, равными им в силу последних двух равенств (10). Здесь $T_1=E-\Gamma_1$, $T_2=E-\Gamma_0$, E – единичная матрица. В результате для производной dV/dt в силу системы (10) окончательно получим

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{S=1}^{2}\left[\int_0^1-\varphi_S^{\mathrm{T}}\frac{d\nu^{(S)}(x_S)A_S}{dx_S}\varphi_S dx_S+\varphi_S^{\mathrm{T}}(1,t)T_1^{\mathrm{T}}\nu^{(S)}(1)A_ST_1\varphi_S(1,t)-\right.$$

$$-\varphi_S^{\mathrm{T}}(0,t)T_2^{\mathrm{T}}\nu^{(S)}(0)A_ST_2\varphi_S(0,t)+2\varphi_S^{\mathrm{T}}(1,t)\left(B_S^{\mathrm{T}}Q+T_1^{\mathrm{T}}\nu^{(S)}(1)A_S\Gamma_{2S}\right)z-$$

$$-G^{\mathrm{T}}\nu^{(S)}(0)A_SGu_S^2-2G^{\mathrm{T}}\nu^{(S)}(0)A_ST_2\varphi_S(0,t)u_S+z^{\mathrm{T}}\left(QB+B^{\mathrm{T}}Q+\right.$$

$$\left.\left.+\Gamma_{2S}^{\mathrm{T}}\nu^{(S)}(1)A_S\Gamma_{2S}\right)z\right]. \tag{15}$$

Введём функционал

$$W=\sum_{S=1}^{2}W_S+W_0,\quad W_S=\int_0^1\varphi_S^{\mathrm{T}}w^{(S)}\left(x_S\right)\varphi_S dx_S,\quad W_0=z^{\mathrm{T}}\omega z,\tag{16}$$

где $w^{(S)}\left(x_S\right)$, ω – симметричные матрицы: матрица ω – постоянная, а элементы матриц $w^{(S)}$ – непрерывные ограниченные функции, и сначала решим следующую задачу.

Найдём законы регулирования давлений в баках u_{SO}, обеспечивающие выполнение условия

$$\frac{dV}{dt}=-W\tag{17}$$

с наименьшим значением величины $\sum_{S=1}^{2}u_S^2$ в каждый момент времени. Эту задачу решим, используя метод множителей Лагранжа. Составим функционал $L=\sum_{S=1}^{2}u_S^2+\lambda\left(dV/dt+W\right)$, где λ – множитель Лагранжа, а производная dV/dt определяется выражением (15). Из условия достижения min L по u_S найдём оптимальные законы регулирования

$$u_{SO}=\lambda\left(1-\lambda G^{\mathrm{T}}\nu^{(S)}\left(0\right)A_S G\right)^{-1}G^{\mathrm{T}}\nu^{(S)}\left(0\right)A_S T_2\varphi_S\left(0,t\right),$$

$$1-\lambda G^{\mathrm{T}}\nu^{(S)}\left(0\right)A_S G>0,\quad \lambda>0,\tag{18}$$

или с учётом элементов матриц A_S, G, T_2 –

$$u_{SO}=-\frac{\lambda a_S\nu_{11}^{(S)}\left(0\right)}{1+\lambda b_S\nu_{12}^{(S)}\left(0\right)}g_S\left(0,t\right),\quad 1+\lambda b_S\nu_{12}^{(S)}\left(0\right)>0,\quad \lambda>0,\tag{19}$$

где $g_1\left(0,t\right)=g_0\left(0,t\right)$, $g_2\left(0,t\right)=g_{\Gamma}\left(0,t\right)$.

Подставляя законы (18) в (15), из равенства (17) получим уравнения

$$\frac{d\nu^{(S)}(x_S)A_S}{dx_S} = w^{(S)}, \quad T_1\nu^{(S)}(1)A_S T_1 = 0,$$

$$T_2^{\mathrm{T}}\nu^{(S)}(0)A_S T_2 + \lambda T_2^{\mathrm{T}}\nu^{(S)}(0)A_S G\Big(1-\lambda G^{\mathrm{T}}\nu^{(S)}(0)A_S G\Big)^{-1}\Big(2-\lambda G^{\mathrm{T}}\nu^{(S)}(0)A_S G\Big)\times$$

$$\times\Big(1-\lambda G^{\mathrm{T}}\nu^{(S)}(0)A_S G\Big)^{-1} G^{\mathrm{T}}\nu^{(S)}(0)A_S T_2 = 0,$$

$$B_1^{\mathrm{T}}Q + T_1^{\mathrm{T}}\nu^{(S)}(1)A_S\Gamma_{2S} = 0, \quad QB_0 + B_0^{\mathrm{T}}Q + \sum_{S=1}^{2}\Gamma_{2S}^{\mathrm{T}}\nu^{(S)}(1)A_S\Gamma_{2S} = -\omega, \qquad (20)$$

которые совместно с (13) используются для построения матриц $\nu^{(S)}$, u, Q при заданных матрицах $w^{(S)}$, ω. Однако, здесь не все элементы матриц $w^{(S)}$, ω могут быть заданы произвольно. Некоторые из них определяются по ходу решения уравнений (20).

Величина λ, входящая в законы (18) и уравнения (20), остаётся произвольной, но она должна удовлетворять условию $\lambda > 0$. Так как, если $\lambda \le 0$, то из (15) с учётом (18), (20) получим $dV/dt\big|_{u_S=0} \le dV/dt\big|_{u_S=u_{SO}}$, т.е. при $\lambda \le 0$ законы u_{SO} (18) не способствуют стабилизации системы (10).

Согласно методу функций Ляпунова [9, 20] законы (19) решают исходную задачу, если интегральная квадратичная форма V_S (11) непрерывна и определённо положительна по норме ρ_S, квадратичная форма V_0 (11) определённо положительна, а производная dV/dt (15) определённо отрицательна по переменным z, ρ_S.

Непрерывность интегральной формы V_S по норме ρ_S непосредственно следует из ограниченности элементов матриц $\nu^{(S)}(x_S)$. Остальные условия этого утверждения будут выполнятся, если матрицы Q и ω – определённо положительные, а $\nu^{(S)}(x_S)$ и $w^{(S)}(x_S)$ – определённо положительные при $x_S \in [0,1]$, т.е.

$$Q > 0, \quad \omega > 0, \quad \nu^{(S)}(x_S) > 0, \quad w^{(S)}(x_S) > 0, \quad x_S \in [0,1].$$

Первые три уравнения (20) распишем в скалярной форме

$$b_S \frac{d\nu_{12}^{(S)}}{dx_S} = -w_{11}^{(S)}, \quad a_S \frac{d\nu_{12}^{(S)}}{dx_S} = -w_{22}^{(S)}, \quad a_S \frac{d\nu_{11}^{(S)}}{dx_S} = -w_{12}^{(S)},$$

$$b_S \nu_{12}^{(S)}(1) = 0, \quad a_S \nu_{12}^{(S)}(0) = \frac{\lambda a_S^2 \left(\nu_{11}^{(S)}(0)\right)^2 \left(2 + \lambda b_S \nu_{12}^{(S)}(0)\right)}{\left(1 + \lambda b_S \nu_{12}^{(S)}(0)\right)^2}, \tag{21}$$

В уравнениях (21) числа $w_{11}^{(S)}$, $w_{12}^{(S)}$ можно задавать произвольно, а числа $w_{22}^{(S)}$ найдутся из этих уравнений.

Полагая $w_{11}^{(S)} = 1$, $w_{12}^{(S)} = 0$, из уравнений (21), (13) найдём

$$\nu_{11}^{(S)} = \frac{1 + \lambda}{\sqrt{a_S b_S \lambda (2 + \lambda)}}, \quad \nu_{12}^{(S)} = \frac{(1 - x_S)}{b_S}, \quad w_{22}^{(S)} = \frac{a_S}{b_S}, \quad \nu_{22}^{(S)} = \frac{a_S}{b_S} \nu_{11}^{(S)}. \tag{22}$$

Последние два уравнения (20) имеют большие размерности. Поэтому их здесь расписывать не будем.

По этим уравнениям построены матрицы Q, ω со следующими элементами

$$q_{11} = a_1 \frac{\theta_{\text{К}}}{k_1} \nu_{11}^{(1)}, q_{22} = a_1 T_0 \nu_{11}^{(1)}, q_{33} = a_2 T_{\Gamma} \nu_{11}^{(2)}, q_{44} = \frac{a_1 T_{\text{ТР}} \nu_{11}^{(1)}}{k_1 \gamma_1}, q_{55} = \frac{\gamma_5 \theta_{\Gamma} c}{\gamma_2}, q_{ij} = 0 \; (i \neq j),$$

$$\omega_{11}=\omega_{44}=\frac{2}{k_1}a_1\nu_{11}^{(1)},\ \omega_{22}=2\left(k_3+k_5\right)a_1\nu_{11}^{(1)},\ \omega_{33}=2\left(k_4+k_7\right)a_2\nu_{11}^{(2)},$$

$$\omega_{24}=\frac{\gamma_3 a_1\nu_{11}^{(1)}}{k_1\gamma_1}-a_1k_6\nu_{11}^{(1)},\ \omega_{34}=\frac{\gamma_4 a_1\nu_{11}^{(1)}}{k_1\gamma_1}-a_2k_8\nu_{11}^{(2)},\ \omega_{45}=-\frac{a_1k_{11}\nu_{11}^{(1)}}{k_1\gamma_1},$$

где c – произвольная положительная постоянная. Также установлена следующая зависимость

$$\nu_{11}^{(2)}=\frac{a_1k_2}{a_2k_1}\nu_{11}^{(1)} \tag{23}$$

между числами $\nu_{11}^{(1)}$ и $\nu_{11}^{(2)}$. Остальные элементы матрицы ω равны нулю.

Таким образом, матрицы $\nu^{(S)}\left(x_S\right)$, $w^{(S)}$, Q, ω, удовлетворяющие уравнениям (13), (20), построены. При этом матрицы Q, $w^{(S)}$ определённо положительные, матрица $\nu^{(S)}\left(x_S\right)$ определённо положительная при всех $x_S\in\left[0,1\right]$, а матрица ω будет определённо положительной, если, согласно критерию Сильвестра, выполняются условия

$$\omega_{33}\left(\omega_{22}\omega_{44}-\omega_{24}^2\right)>\omega_{22}\omega_{34}^2, \tag{24}$$

$$c>\frac{\omega_{22}\omega_{33}\omega_{45}^2}{\omega_{33}\left(\omega_{22}\omega_{44}-\omega_{24}^2\right)-\omega_{22}\omega_{34}^2}. \tag{25}$$

При выполнении условия (24) неравенству (25) всегда можно удовлетворить соответствующим выбором значения постоянной c.

Таким образом, законы регулирования (19), которые с учётом значений $\nu_{11}^{(S)}(0)$ и $\nu_{12}^{(S)}(0)$ запишутся в виде

$$u_{SO} = -\sqrt{\frac{\lambda a_S}{b_S(2+\lambda)}}g_S(0,t), \quad \lambda > 0, \quad S = 1,2, \tag{26}$$

обеспечивают асимптотическую устойчивость расчётного режима работы ЖРД, если выполняется условие (24). Неравенство (25) не является условием устойчивости. Оно представляет условие, согласно которому должна выбираться постоянная c, чтобы матрица ω была определённо положительной.

Практически регулирование давлений в баках осуществляется системой наддува баков. Однако благодаря сравнительно большому объёму газовой «подушки» в верхней полости баков и сжимаемости газа такое регулирование имеет значительную инерционность. С учётом последней процесс регулирования давлений в баках можно описать уравнениями инерционных звеньев:

$$T_{\Gamma S}\frac{du_{SO}}{dt} + u_{SO} = u_{\Gamma S}, \quad S = 1,2, \tag{27}$$

где $u_{\Gamma S} = \dfrac{P_{\Gamma S} - P_{\Gamma S}^*}{P_{\Gamma S}^*}$; $P_{\Gamma S}$ – давления в системе наддува, т.е. давление газа, поступающего в бак, если $P_{\Gamma S} > 0$, или стравливаемого из бака, если $P_{\Gamma S} < 0$; $T_{\Gamma S}$ – постоянные времени, характеризующие длительность установления давлений $P_{\Gamma S}$ в баках; u_{SO} – относительные давления в баках.

Подставляя выражения u_{SO} (26) в уравнения (27), найдём законы регулирования давлений наддува $u_{\Gamma S}$, реализующие изменения давлений в баках по законам (26):

$$u_{\Gamma S} = -h_S\left(T_{\Gamma S}\frac{dg_S(0,t)}{dt} + g_S(0,t)\right), \quad S = 1,2, \tag{28}$$

где $h_S = \sqrt{\dfrac{\lambda a_S}{b_S(2+\lambda)}} = (\lambda a_S)^{1/2}\left[b_S(2+\lambda)\right]^{-1/2}$, $g_1(0,t) = g_O(0,t)$, $g_2(0,t) = g_\Gamma(0,t)$.

Однако давления системы наддува $u_{\Gamma S}$ (28) будут обеспечивать точное изменение давлений в баках по законам (26) только в том случае, если равенства (26) имеют место в начальный момент времени, т.е. в момент включения системы наддува. Если же равенства (26) в начальный момент не выполняются, то необходимо дополнительно исследовать на устойчивость систему (10), (27), (28).

Рассмотрим функционал Ляпунова

$$V_1 = V + \sum_{S=1}^{2}\left(u_{SO} + h_S g_S(0,t)\right)^2, \tag{29}$$

где V – форма (11).

Производную dV_1/dt в силу системы (10), (27), (28) с учётом (15), (20) и значений матриц $T_2 = E - \Gamma_0$, A_S, G [см. (10), (14)] получим в виде

$$\frac{dV_1}{dt} = -z^T\omega z - \sum_{S=1}^{2}\left\{\int_0^1 \varphi_S^T w^{(S)}\varphi_S dx_S - \left[2v_{11}^{(S)} a_S g_S(0,t)u_{SO} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(b_S u_{SO}^2 + a_S g_S^2(0,t)v_{12}^{(S)}(0) - \frac{2}{T_{\Gamma S}}\left(u_{SO} + h_S g_S(0,t)\right)\right)^2\right]\right\}, \tag{30}$$

где матрицы $w^{(S)}$, ω и элементы $v_{11}^{(S)}$, $v_{12}^{(S)}$ определены выше.

Пусть равенства (26) не выполняются. Функционал V_1 является определённо положительным по переменным z, ρ_S, u_{SO}, $g_S(0,t)$. Учитывая значения $v_{11}^{(S)}$, $v_{12}^{(S)}(0)$, h_S и применяя критерий Сильвестра, найдём, что при выполнении условия (24) производная (30) также будет определённо отрицательной, а следовательно, система

(10), (27), (28) – асимптотически устойчивой по этим переменным. При выполнении равенств (26) уравнения (27), (28) переходят в тождество 0 = 0, а функционал V_1 (29) и его производная dV_1/dt (30) – в формы V (11) и W (16). Согласно полученным выше результатам, в этом случае система (10) будет асимптотически устойчива по переменным z, ρ_S, если выполняются условия (24).

Таким образом, для обеспечения асимптотической устойчивости расчётного режима работы ЖРД давления системы наддува баков окислителя и горючего следует изменять по законам (28).

Выводы

Вывод 1. В статье сначала построены оптимальные законы регулирования давлений в баках окислителя и горючего, обеспечивающие асимптотическую устойчивость работы ЖРД. Затем определены законы регулирования давлений в системе наддува, реализующие изменение давлений в баках по этим оптимальным законам и обеспечивающие асимптотическую устойчивость совместной работы ЖРД и системы наддува.

Вывод 2. При $\lambda = 0$ из выражений (26) следует $u_{SO} = 0$, а из (22) – $\nu_{11}^{(S)} = \infty$. Это означает, что без соответствующего регулирования давления в баках по законам (26) обеспечить асимптотическую устойчивость работы ЖРД не удаётся.

Список источников

1. Крокко Л., Чжин Синь-И. Теория неустойчивости горения в жидкостных ракетных двигателях. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 351 с.

2. Гликман Б.Ф. Автоматическое регулирование жидкостных ракетных двигателей. – М.: Машиностроение, 1974. – 336 с.

3. Махин В.А., Присняков В.Ф., Белик Н.П. Динамика жидкостных ракетных двигателей. – М.: Машиностроение, 1969. – 334 с.

4. Бабкин А.И., Белов С.И., Рутовский Н.Б., Соловьев Е.В. Основы теории автоматического управления ракетными двигательными установками. – М.: Машиностроение, 1978. – 328 с.

5. Байрамов Ф.Д., Байрамов Б.Ф. Оптимальная стабилизация работы жидкостного ракетного двигателя // Труды МАИ. 2022. № 125. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=168149. DOI: 10.34759/trd-2022-125-03

6. Колесников Н.С., Сухов В.Н. Упругий летательный аппарат как объект автоматического управления. – М.: Машиностроение, 1974. – 268 с.

7. Мошкин Е.К. Нестационарные режимы работы ЖРД. – М.: Машиностроение, 1970. – 336 с.

8. Байрамов Б.Ф., Байрамов Ф.Д. Об устойчивости одного класса линейных систем с распределенными и сосредоточенными параметрами // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, № 6. С. 757–763. DOI: 10.31857/S003282350002739-2

9. Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. – Новосибирск: Наука, 1987. – 230 с.

10. Крапивных Е.В. Влияние гидравлических характеристик подводящих и отводящих магистралей на статические характеристики и работоспособность стабилизатора давления жидкостного ракетного двигателя // Труды МАИ. 2015. № 80. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=56924

11. Галеев А.В. Оптимизация схем и режимов заправки вытеснительной системы подачи компонентов ракетного топлива для испытаний камеры сгорания ЖРД // Труды МАИ. 2016. № 86. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=67814

12. Тимушев С.Ф., Федосеев С.Ю. Методика численного моделирования вибрации осевого бустерного насоса жидкостного ракетного двигателя // Труды МАИ. 2015. № 83. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=62080

13. Клименко Д.В., Тимушев С.Ф., Корчинский В.В. Сравнительный анализ пульсаций давления в вариантах трубчатого направляющего аппарата шнекоцентробежного насоса жидкостных ракетных двигателей // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=58687

14. Wang P.K.C. Theory of stability and control for distributed parameter systems (a Bibliography) // International Journal of Control. 1968. V. 7, No. 2, P. 101–116. DOI: 10.1080/00207176808905588

15. Wang P.K.C. On the stability of equilibrium of a mixed distributed and lumped parameter control system // International Journal of Control. 1966. V. 3, No. 2. P. 139–147. DOI: 10.1080/00207176608921374

16. Байрамов Ф.Д., Байрамов Б.Ф., Мардамшин И.Г. Математическое моделирование и устойчивость гидравлической системы с ветронасосным агрегатом // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н.

Туполева. 2009. № 4. С. 103–106.

17. Байрамов Ф.Д. К устойчивости работы жидкостного ракетного двигателя (ЖРД) с турбонасосным агрегатом (ТНА) // Известия вузов. Авиационная техника. 1978. № 4. С. 16–22.

18. Семенов П.К. Об устойчивости работы ЖРД // Известия вузов. Авиационная техника. 1972. № 3. С. 16–21.

19. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

20. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1952. – 432 с.

References

1. Crocco L., Cheng Sin-I. *Theory of combustion instability in liquid propellant rocket motors*, London, Butterworths scientific Publ., New York, Interscience Publ. Inc., 1956. 200 p.

2. Glikman B.F. *Avtomaticheskoe regulirovanie zhidkostnykh raketnykh dvigatelei* (Automatic control of liquid-propellant rocket engines), Moscow: Mashinostroenie Publ., 1974. 336 p.

3. Makhin V.A., Prisnyakov V.F., Belik N.P. *Dinamika zhidkostnykh raketnykh dvigatelei* (Dynamics of liquid-propellant rocket engines). Moscow: Mashinostroenie Publ., 1969. 334 p.

4. Babkin A.I., Belov S.I., Rutovskii N.B., Solov'ev E.V. *Osnovy teorii avtomaticheskogo upravleniya raketnymi dvigatel'nymi ustanovkami* (Foundations of the

theory of automatic control of rocket propulsion systems). Moscow: Mashinostroenie Publ., 1978. 328 p.

5. Bairamov F.D., Bairamov B.F. Optimal stabilization of operation of liquid-propellant rocket engine. *Trudy MAI*. 2022. No. 125. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168149. DOI: 10.34759/trd-2022-125-03

6. Kolesnikov N.S., Sukhov V.N. *Uprugii letatel'nyi apparat kak ob''ekt avtomaticheskogo upravleniya* (Elastic aircraft as an object of automatic control). Moscow: Mashinostroenie Publ., 1974. 268 p.

7. Moshkin E.K. *Nestatsionarnye rezhimy raboty ZHRD* (Non-stationary modes of operation of liquid-propellant rocket engines). Moscow: Mashinostroenie Publ., 1970. 336 p.

8. Bairamov B.F., Bairamov F.D. On stability of a class of linear systems with distributed and lumped parameters. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 2018. V. 82, No. 6. P. 757–763. (In Russ.). DOI: 10.31857/S003282350002739-2

9. Sirazetdinov T.K. *Ustoichivost' sistem s raspredelennymi parametrami. parametrami* (Stability of systems with distributed parameters). Novosibirsk: Nauka Publ., 1987. 230 p.

10. Krapivnykh E.V. Influence of hydraulic characteristics of inlet and outlet lines on static characteristics and performance of the pressure regulator liquid reactive engine. *Trudy MAI*. 2015. No. 80. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=56924

11. Galeev A.V. Optimization of schemes and modes of filling pressure feed system components of rocket fuel for testing of combustion chambers the rocket LPE. *Trudy MAI.* 2016. No. 86. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=67814

12. Timushev S.F., Fedoseev S.Yu. Methods of numerical simulation of vibration of the liquid rocket engine axial booster PUMP. *Trudy MAI*. 2015. No. 83. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=62080

13. Klimenko D.V., Timushev S.F., Korchinskii V.V. Comparative analysis of pressure pulsations in designs of the tubular guide channels of the LRE screw centrifugal pump. *Trudy MAI*. 2015. No. 82. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58687

14. Wang P.K.C. Theory of stability and control for distributed parameter systems (a Bibliography). *International Journal of Control*. 1968. V. 7, No. 2. P. 101–116. DOI: 10.1080/00207176808905588

15. Wang P.K.C. On the stability of equilibrium of a mixed distributed and lumped parameter control system // International Journal of Control. 1966. V. 3, No. 2. P. 139–147. DOI: 10.1080/00207176608921374

16. Bairamov F.D., Bairamov B.F., Mardamshin I.G. Mathematical modeling and stability of a hydraulic system with a wind pump unit. *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. A.N. Tupoleva*. 2009. No. 4. P. 103–106. (In Russ.)

17. Bairamov F.D. On the stability of operation of a liquid rocket engine (LRE) with a turbopump unit (TPU). *Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya tekhnika*. 1978. No. 4. P. 16–22. (In Russ.)

18. Semenov P.K. On the stability of the liquid propellant rocket engine. *Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya tekhnika*. 1972. No. 3. P. 16–21. (In Russ.)

19. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (Equations of mathematical physics). Moscow: Nauka Publ., 1977. 736 p.

20. Malkin I.G. *Teoriya ustoichivosti dvizheniya* (Theory of motion stability). Moscow: Gostekhizdat Publ., 1952. 432 p.

Статья поступила в редакцию 06.02.2025

Одобрена после рецензирования 17.02.2025

Принята к публикации 25.06.2025

The article was submitted on 06.02.2025; approved after reviewing on 17.02.2025; accepted for publication on 25.06.2025