

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 534.1:629.7

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=185684>

EDN: <https://www.elibrary.ru/LANZLN>

РАСЧЁТ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНСТРУКЦИЙ РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ

Ольга Игоревна Малыхина[✉], Георгий Михайлович Макарьянц

Самарский университет,

Самара, Россия

✉ maloliya@ya.ru

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы выбора рационального размера балочного конечного элемента (КЭ) конечно-элементной модели (КЭМ), применяемой для решения задач динамики упругих конструкций ракетно-космической техники. Точность динамического расчёта зависит от корректного КЭ моделирования собственных частот и форм колебаний ракеты-носителя (РН), однако существует неопределённость в отношении выбора размера КЭ, что впоследствии приводит к трудностям верификации КЭМ. Верификация модели, с помощью доказательства её сеточной сходимости, подразумевающей уменьшение размера КЭ, в инженерной практике приводит к недопустимым временным затратам. Поэтому целью исследования является разработка рекомендаций по выбору максимально

допустимого размера балочного КЭ динамической КЭМ РН. Первоначально задача поиска собственных частот и форм колебаний была решена для тестового случая незакреплённой однородной балки, для которой была разработана КЭМ с традиционной диагональной матрицей масс (ДММ), а также КЭМ с более точной согласованной матрицей масс (СММ), точность моделирования оценивалась путём сравнения с известными аналитическими решениями. Выявлено соотношение для определения рационального количества элементов при использовании СММ, для случая использования ДММ получены аналогичные приближенные зависимости на основе метода наименьших квадратов. В дальнейшем разработанная рекомендация по выбору размера КЭ с СММ была использована для создания эталонной динамической модели РН, которая была использована при верификации КЭМ, построенной на базе КЭ с ДММ. Это позволило найти адекватное количество КЭ для КЭМ с ДММ реальной конструкции РН большого продольного удлинения тандемной компоновки.

Ключевые слова: конечный элемент, балочная модель, ракета-носитель, согласованная матрица масс, диагональная матрица масс

Для цитирования: Малыхина О.И., Макарьянц Г.М. Расчёт частот и форм собственных изгибных колебаний конструкций ракетно-космической техники // Труды МАИ. 2025. № 144. URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=185684>

MECHANICS

Original article

THE CALCULATION OF THE BENDING FREQUENCIES AND MODES OF SPACE STRUCTURES

Olga I. Malykhina✉, George M. Makaryants,

Samara University, Samara, Russia

✉maloliya@ya.ru

Abstract. The article addresses selecting the optimal size for beam-type finite elements (FE) in dynamic analysis models for elastic structures of rocket and space technology. When designing a launch vehicle (LV), it is crucial to ensure strength reliability with minimal structural weight under intense dynamic loads. The accuracy of dynamic calculations depends on correctly identifying natural frequencies and mode shapes using FE models. However, uncertainty in choosing the FE size leads to difficulties in model verification. Using beam-type FEs with a lumped mass matrix (LMM) to model the LV structure, often related to liquid rocket fuel simulation, can reduce calculation accuracy. Meanwhile, standard verification through grid convergence studies by reducing FE size leads to unacceptable time costs in engineering practice.

Therefore, this study aims to develop recommendations for the maximum allowable size of a beam-type FE with LMM for determining the modes and frequencies of an LV structure.

Initially, the problem of finding modes and frequencies was solved for a test case of a free-free beam with uniform mass and bending stiffness. This case has an analytical solution, which served as a reference for evaluating modeling accuracy. Two models were created: one with traditional LMM and another with coupled mass matrix (CMM). It was found that the rational number of elements using CMM is uniquely determined as a value equal to the increased by one the number of bending vibration modes within the frequency

range of interest. Such a clear relationship between the number of elements and the vibration mode was not observed for the LMM case.

Subsequently, the developed recommendation for selecting beam-type FE size was used to create a reference dynamic model of a launch vehicle built with CMM. This reference model was used to verify the FE model with LMM for a real large-length tandem-type LV design, enabling the determination of an adequate number of elements for the LMM model.

Keywords: finite element, beam model, launch vehicle, coupled mass matrix, lumped mass matrix.

For citation: Malykhina O.I., Makaryants G.M. The calculation of the bending frequencies and modes of space structures // Trudy MAI. 2025. No. 144. (In Russ.)

<https://tptmai.ru/publications.php?ID=185684>

Введение

Многие строительные конструкции, а также крупногабаритные транспортные и технические системы полностью или частично состоят из конструктивных элементов, упругими свойствами которых в процессе решения прикладных задач нельзя пренебрегать. Именно поэтому решение задач, которые требуют моделирования движения указанных объектов, как правило, начинают с расчёта динамических параметров и анализа динамических свойств, описывающих поведение конструкции в процессе собственных колебаний. Основным инструментом, применяемым для анализа динамических свойств конструкций в инженерной практике, в последние годы является метод конечных элементов (МКЭ) [1]. Это связано с тем, что

современные системы автоматизации инженерных расчётов (CAE), включающие программное обеспечение для конечно-элементного анализа, такое как ANSYS, ЛОГОС, NASTRAN и ABAQUS, существенно облегчают работу инженеров, дополняют теоретические и экспериментальные исследования, являются универсальным инструментом, который может использоваться в широком спектре отраслей промышленности. В научной литературе можно встретить большое число работ, посвящённых вопросам разработки конечно-элементных моделей в обеспечение решения задач, связанных с динамикой сложных технических конструкций, таких как транспортные строительные конструкции [2, 3], суда, сложные котельные конструкции [4]. Настоящая статья посвящена конструкциям ракетно-космической техники (РКТ), обладающим той особенностью, что значительную часть своего жизненного цикла они, в отличие от строительных конструкций, являются незакреплёнными, т.е. имеют возможность свободно перемещаться в пространстве под действием приложенных внешних сил. Изделия РКТ обычно характеризуются значительными размерами, что затрудняет, а порой делает невозможным проведение полномасштабных динамических испытаний. Достаточно сложная структура взаимосвязанных внутренних элементов конструкции делает чрезвычайно трудоёмким и соответственно малоэффективным применение методов анализа динамики конструкций на основе аналитических соотношений. Таким образом, проектирование РКТ в значительной степени зависит от CAE-моделирования с использованием МКЭ.

Для моделирования изделий РКТ с целью решения баллистических задач, а также задач, связанных с расчётом внутренних усилий в силовых элементах

конструкции корпуса ракеты-носителя (РН) и определением параметров воздействий на приборы и агрегаты обычно используется балочная формализация [5, 6]. Как отмечено в работе [7], балочные модели «не теряют своей актуальности, поскольку позволяют существенно экономить время расчета модели, что особенно актуально в нелинейных задачах и задачах динамики».

В работе [8] проведён сравнительный анализ расчётов по балочной и оболочечной конечно-элементной модели тонкостенного цилиндра, имеющего относительное удлинение равное 0,53. Неточность применения балочной КЭМ характеризуется 6-ти процентным расхождением с результатами, полученными по оболочечной КЭМ.

В работах [9-14] рассматриваются вопросы разработки динамической КЭМ РН, при этом особое внимание в статье [9] уделяется способам повышения точности конечно-элементных расчётов. Методике моделирования трещин в схеме МКЭ для оценки влияния расслоения в композитных элементах РН на динамическое напряженно-деформированное состояние посвящена работа [10]. В статье [11] рассматривается метод конечно-элементного моделирования, позволяющий эффективно решать задачи о движении конструкции космического аппарата при больших деформациях и рассчитывать отклик во временной области при типичных нагрузках, таких как сосредоточенные силы, силы инерции и крутящие моменты. В статьях [12, 13] представлена методика, позволяющая оценить наихудшие аэродинамические нагрузки на этапе полёта РН в атмосфере при воздействии ветровой турбулентности. Авторами работы [14] рассмотрены подходы,

направленные на сокращения времени и затрат на разработку новых конфигураций РН, что «особенно важно в свете неизбежного роста спроса на услуги по запуску».

В работе [15] утверждается, что аппроксимация перемещений в виде полиномов невысокого порядка, обычно применяемая в рамках МКЭ, при решении динамических задач «приводит к значительным ошибкам уже при определении низших частот». При этом отмечается, что подход, при котором каждому однородному с точки зрения массово-жесткостных и инерционных характеристик элементу конструкции соответствует один конечный элемент (КЭ) модели, является предпочтительным, поскольку позволяет проводить подготовку данных «непосредственно с конструкторского чертежа». Аналогичная идеология заложена в работах Цукановой [16], где кроме того отмечается необходимость повышения точности динамических расчётов, особенно в области высоких частот. Однако приведенные в указанных работах подходы приводят к необходимости с целью поиска собственных частот конструкции решать трансцендентное уравнение, что отличает указанные подходы от классического МКЭ и требует поиска наиболее подходящих численных методов, а также разработки эффективных программных средств. Данные программные средства в современных условиях должны включать возможность визуального контроля разрабатываемой модели. Указанная возможность является стандартной для САЕ-проектирования и, с учётом сложности современных конструкций, видится необходимой.

При решении динамических задач с помощью МКЭ, связанных с определением собственной частоты, используются два основных подхода к формированию матриц масс элементов, а именно: применение согласованных матриц и несогласованных

(диагональных) массовых матриц. В работе [1] отмечено, что среди разработчиков стандартных программ конечно-элементного анализа считается, что согласованные матрицы масс не должны использоваться в данных программах по умолчанию, поскольку это приводит к увеличению вычислительных затрат, и этот подход был принят ещё в 1970 году. Однако в настоящее время, когда компьютеры стали достаточно быстрыми, расчётчик может с лёгкостью использовать согласованную постановку для формирования матриц масс элементов, которая обладает преимуществом в виде большей точности, вместо диагональных матриц масс, применение которых требует более мелкого разбиения конструкции на КЭ для достижения той же точности. В работе [1] также утверждается, что при исследовании высокочастотных диапазонов спектра, предпочтительной является согласованная формулировка матриц масс.

Таким образом, анализ литературных источников показал следующие основные направления научных исследований:

- сокращение времени проектировочных расчётов;
- повышение точности расчётов динамических характеристик, особенно в области высоких частот.

В данной статье рассматриваются вопросы выбора рационального размера балочного КЭ конечно-элементной модели, применяемой для решения задач динамики упругих конструкций РКТ. При проектировании РН важным является вопрос обеспечения его прочностной надёжности при минимальной массе конструкции в условиях воздействия интенсивных динамических нагрузок. Точность

динамического расчёта зависит от корректного КЭ моделирования собственных частот и форм колебаний РН.

Однако существует неопределённость в отношении выбора размера КЭ. Известно, что недостаточное число КЭ может значительно снизить точность расчётов, а слишком мелкое разбиение может сделать чрезмерно трудоёмкими ввод исходных данных и обработку полученных результатов, а также увеличить время, необходимое для проведения расчётов. Данное замечание становится наиболее актуальным при решении динамических задач, особенно в нелинейной постановке.

Поэтому обычно к выбору числа элементов подходят взвешено, а разработанная КЭМ в обязательном порядке проходит процедуру верификации. При этом верификация модели, которая осуществляется с помощью доказательства её сеточной сходимости, подразумевающей уменьшение размера КЭ, в инженерной практике может приводить к недопустимым временным затратам. Это определяется тем, что балочная КЭМ РН обычно разрабатывается путём прямого создания элементов (без предварительного формирования геометрии), содержит достаточно большое число элементов, а также сосредоточенные массовые элементы, моделирующие топливо, что исключает возможность автоматического измельчения сетки стандартными средствами препроцессора. По этой причине актуальным видится отыскание другого эффективного подхода к верификации модели.

Для проведения расчётов разрабатывается не одна, а множество КЭМ с учётом переменного массового состава РН. Дополнительно стоит отметить, что базовая (пустая) КЭМ ракеты-носителя обычно разрабатывается один раз и используется при проведении расчётов для всех случаев нагружения, рассматриваемых на протяжении

всего цикла её эксплуатации. Таким образом, эта модель должна обладать достаточной степенью универсальности, т.е. принятое изначально решение о количестве элементов не должно меняться в процессе проведения дальнейших расчётов. Массу топлива принято моделировать с помощью сосредоточенных массовых элементов, задаваемых в виде диагональных матриц. Это подразумевает использование диагональных матриц масс (ДММ) балочных конечных элементов, моделирующих конструкцию корпуса РН. Однако известно, что элементы с ДММ дают меньшую вычислительную точность, что делает ещё более актуальным вопрос выбора рационального размера КЭ на первоначальном этапе разработки динамической конечно-элементной модели РН.

Поэтому целью исследования является разработка рекомендаций по выбору максимально допустимого размера балочного КЭ с ДММ при разработке динамической конечно-элементной модели РН.

Согласованные и несогласованные матрицы масс балочного конечного элемента

При проведении статического анализа проводится решение алгебраической системы уравнений: $[K]\{u\}=\{F\}$. При решении динамических задач методом разложения по формам собственных колебаний на первом этапе проводится решение следующей однородной системы дифференциальных уравнений: $[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\}$, где $[M]$, $[K]$ – матрицы массы и жёсткости конструкции соответственно, $\{u\}$ – вектор перемещений узлов КЭМ конструкции. Матрицы массы и жёсткости КЭМ конструкции формируются из матриц отдельных элементов.

Существуют два основных вида матриц масс КЭ: согласованная матрица масс и несогласованная матрица масс, отличающиеся подходом, применяемым при формировании их элементов.

Согласованная (Coupled) матрица масс получается с помощью функций формы для элементов и задается формулой [1]: $[M_{\text{согл}}] = \int \rho \{X\}^T \{X\} dv$.

Рассмотрим балку, способную совершать только изгибные плоские колебания, в продольном направлении перемещения узлов ограничим, сдвиговые деформации учитывать не будем. Каждый узел КЭ с учётом наложенных ограничений будет обладать двумя степенями свободы (одна поступательная и одна вращательная). Согласованная матрица масс балочного КЭ в этом случае будет иметь шестнадцать элементов, которые могут быть вычислены по формуле:

$$[M_{\text{согл}}]_{pr} = \rho S \int_0^l X_p(x) X_r(x) dx, \quad (1)$$

где l – длина балочного КЭ, S – площадь поперечного сечения КЭ, ρ – плотность, $X_p(x)$, $X_r(x)$ ($p = 1 \dots 4$, $r = 1 \dots 4$) – функции формы конечного элемента (аппроксимирующие функции), определяемые следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} X_1(x) &= 1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3, & X_2(x) &= x - \frac{2}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3, \\ X_3(x) &= \frac{3}{l^2}x^2 - \frac{2}{l^3}x^3, & X_4(x) &= -\frac{1}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3. \end{aligned} \quad (2)$$

Согласованная (Coupled) матрица масс включает в себя недиагональные элементы и также упоминается в литературе, посвящённой конечно-элементному моделированию как полная или связанная матрица масс.

Несогласованная (Lumped) или диагональная матрица масс – это матрица, получаемая с помощью стандартных схем суммирования инерционных

характеристик, обычно используемых в литературе по МКЭ. Применение этого типа матриц является экономным с точки зрения вычислительного процесса [1], особенно в задачах анализа ударных динамических (переходных) процессов, поскольку вычислительная процедура включает в себя обращение матрицы массы. Эта матрица в литературе упоминается также как матрица сосредоточенных масс.

Отметим, что масса не играет никакой роли в статическом анализе, и, следовательно, для этого типа анализа, не имеет значения, используем ли мы матрицы в согласованной или несогласованной постановке.

Вычисляя интегралы (1) с учётом (2), мы получим выражение для определения элементов согласованной матрицы масс КЭ:

$$M_{\text{согл}} = \frac{lm}{35} \begin{bmatrix} 13 & 11l/3 & 9/2 & -13l/12 \\ 11l/6 & l^2/3 & 13l/12 & -l^2/4 \\ 9/2 & 13l/12 & 13 & -11l/6 \\ -13l/12 & -l^2/4 & -11l/6 & l^2/3 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Тестовые расчёты для однородной балки

Рассмотрим влияние выбора типа матриц, а также дискретности модели при конечно-элементном моделировании на результаты расчёта. Для этого проведем расчёт собственных форм и частот плоских поперечных колебаний незакреплённой балки методом конечных элементов в согласованной и несогласованной постановке. Характеристики балки будем варьировать: длину L в диапазоне от 5 до 60 м, погонную массу m в диапазоне от 500 до 5000 кг/м и погонную изгибную жёсткость b от 10^7 до 10^{10} Н·м². Сравним полученные результаты с точными решениями для частоты колебаний свободной балки, которая определяется по формуле:

$$\omega(n) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{v_n}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{b}{m}}, \quad \text{где } v_1 = 4.7300, \quad v_2 = 7.8532, \quad v_n = (n + 0,5)\pi \quad (\text{при } n \geq 2),$$

n – номер упругого поперечного тона колебаний.

Чтобы исключить влияние характеристик балки (l, m, b) проведём сравнение нормированной собственной частоты: $\tilde{\omega}(n) = \omega(n)L^2 \sqrt{\frac{m}{b}}$.

Будем также варьировать число элементов, применяемых для формирования КЭМ балки. Отобразим полученные результаты на графиках зависимости нормированной собственной частоты от номера тона. Накладывая графики для балок с разными характеристиками, убеждаемся в их абсолютном совпадении. Таким образом получена диаграмма (рисунок 1), которая характеризует зависимость точности расчёта собственных частот от числа конечных элементов КЭМ для согласованной и несогласованной постановки матрицы масс и представляет собой набор функциональных зависимостей собственных частот $\omega(n)$ от номера тона колебаний n для различной степени дискретизации КЭМ. Отметим, что вид диаграммы не зависит от характеристик балки (L, m, b) и зависимость нормированной безразмерной частоты $\tilde{\omega}(n)$ совпадает с зависимостью для собственной частоты $\omega(n)$, выраженной в герцах при единичных характеристиках ($L = 1$ м, $m = 1$ м/кг, $b = 1$ Н · м²), которая и приведена на диаграмме.

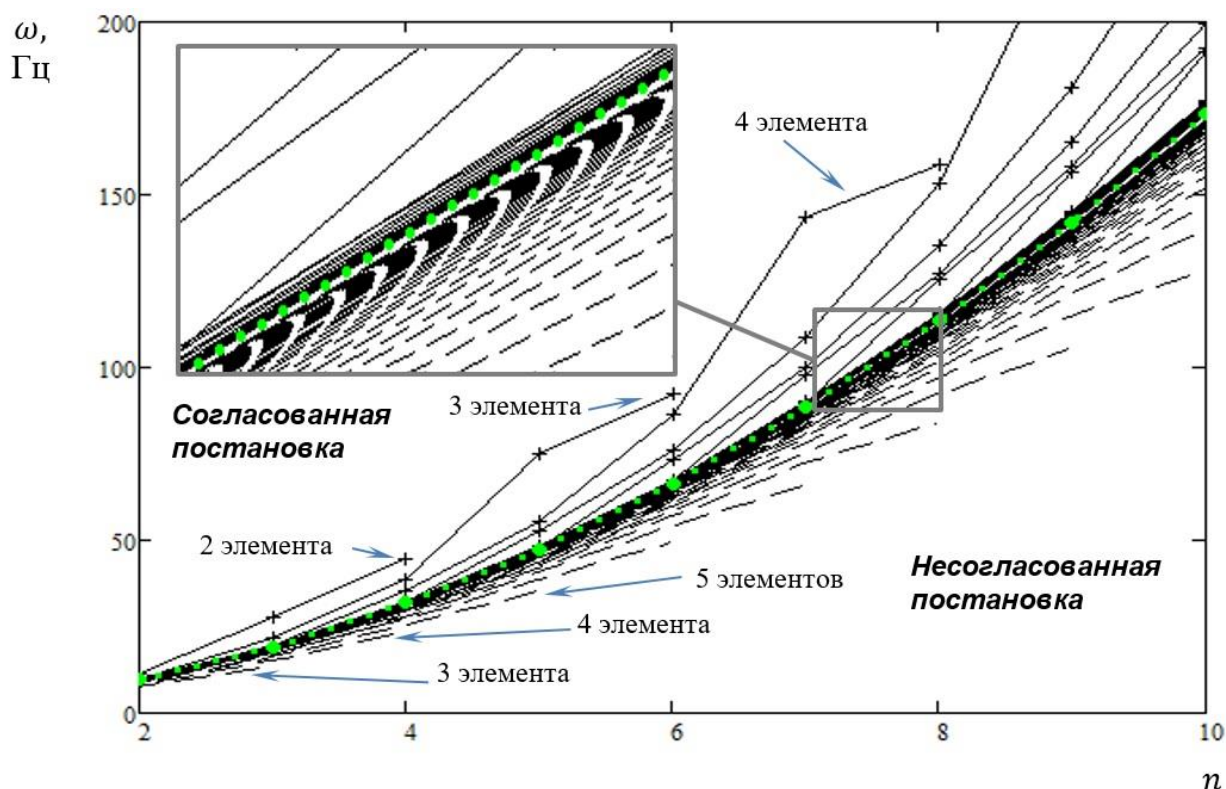


Рисунок 1 – Зависимость сходимости частоты собственных колебаний к точному решению (·····) от числа разбиения на КЭ при использовании согласованной (——) и несогласованной (— — —) матрицы масс КЭ

Как видно из рисунка 1 при использовании согласованной матрицы масс КЭ с увеличением числа элементов частоты собственных колебаний быстро сходятся к точному решению, при этом достаточно высокая точность колебаний для однородной свободной балки достигается при количестве элементов N_{el} , вычисленном по формуле:

$$N_{el} = N + 1, \quad (4)$$

где N – число тонов колебаний, которые должны быть вычислены с достаточной точностью (выбирается исходя из интересующего расчётчика частотного диапазона).

Погрешность значений собственной частоты, вычисленная относительно точных

значений, в зависимости от номера тона n , при соблюдении приведенного выше условия для выбора степени дискретизации балки, приведена на рисунке 2.

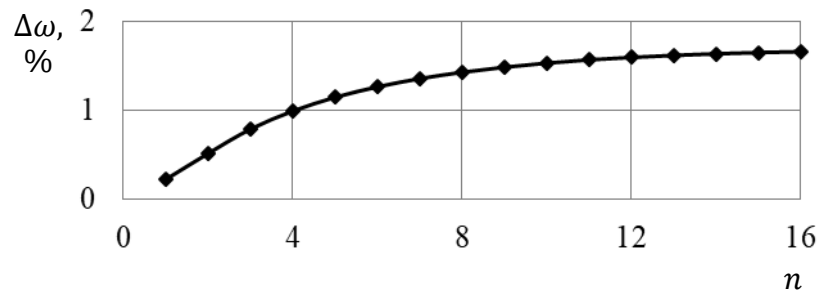


Рисунок 2 – Погрешность определения частоты собственных колебаний, полученной в согласованной постановке (при $N_{el} = N + 1$)

Проанализируем погрешность определения частот в несогласованной постановке, для чего выпишем число элементов, которое понадобилось для получения частоты колебаний с точностью в три, два и один процент относительно точного решения для каждого тона колебаний. Полученные закономерности изображены на рисунке 3, а. Зависимость числа элементов, требуемое для получения частоты колебаний с нужной точностью, от номера тона начиная с четвёртого тона имеет характер изменения, близкий к линейному.

Воспользовавшись методом наименьших квадратов, определим функциональные зависимости, для определения требуемого числа элементов в зависимости от номера тона N (при $N \geq 4$) для вычисления частоты собственных изгибных колебаний балки в несогласованной постановке:

- с погрешностью не более 3 % $N_{el} = 1,54N + 12,13;$
- с погрешностью не более 2 % $N_{el} = 1,87N + 14,66;$
- с погрешностью не более 1 % $N_{el} = 2,63N + 21,02.$

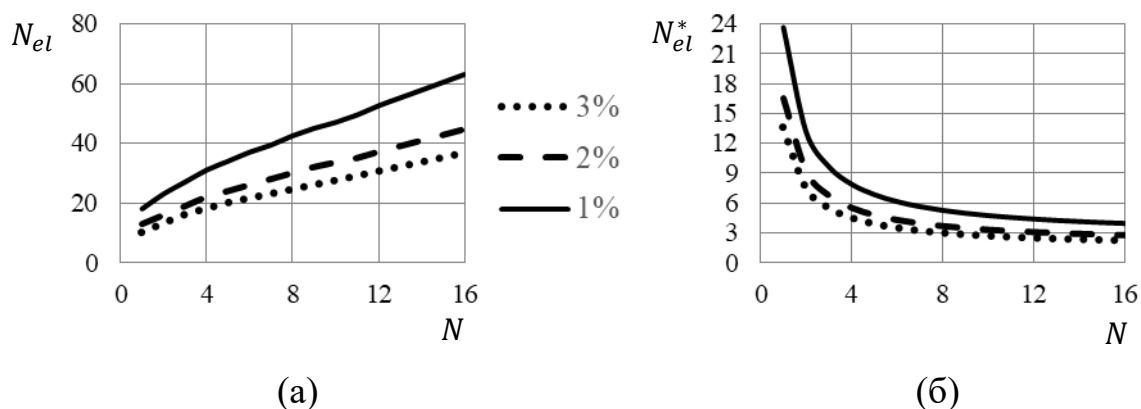


Рисунок 3 – Необходимое для получения в несогласованной постановке частоты N -го тона колебаний с погрешность не более 1 %, 2 % и 3 %

число элементов: (а) – по длине балочной конструкции;

(б) – на полуволну формы колебаний балочной конструкции.

В учебно-методической литературе по МКЭ встречаются рекомендации по требуемому числу элементов на полуволну формы колебаний для балочных конструкций, которое обычно составляет от 3-х до 5-ти элементов. Число элементов на полуволну формы колебаний в зависимости от номера тона, полученное исходя из приведенных выше закономерностей с учётом требуемой точности расчёта частот приведено на рисунке 3, б.

Из рисунка 1 можно сделать вывод, что расчёты частот в несогласованной постановке при недостаточной дискретизации дают заниженное значение частоты, в согласованной – завышенное. Таким образом, совпадение частот с достаточной точностью, полученных при проведении расчётов двумя способами (в согласованной и несогласованной постановке) гарантирует достаточность дискретизации модели.

Отметим, что при моделировании конструкции недостаточным числом элементов значения форм колебаний, полученные с применением несогласованных

матриц имеют недопустимую погрешность даже в узловых точках, что продемонстрировано на рисунке 4 для балки с описанными выше единичными характеристиками.

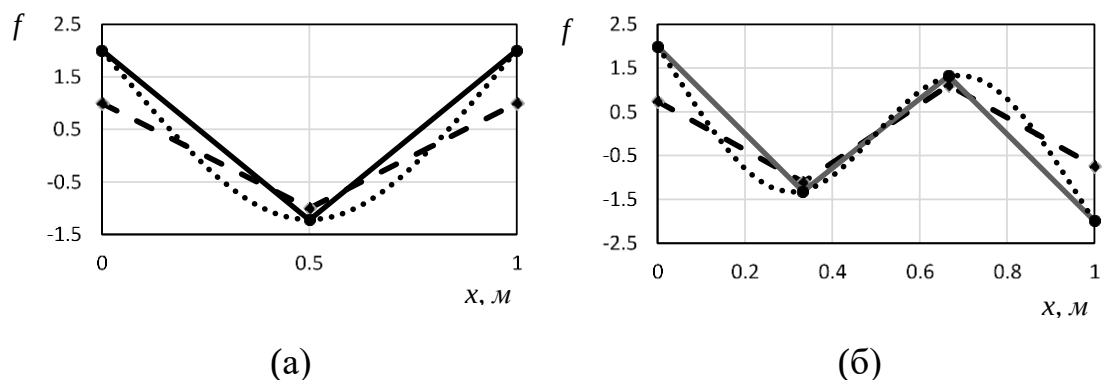


Рисунок 4 – Формы f колебаний первого (а) и второго (б) тона в свободной балки, полученные в согласованной (—) и несогласованной (- - -) постановке в сравнении с аналитической функцией формы (·····)

Точность расчёта форм в узловых точках при использовании согласованных матриц является достаточно высокой даже при минимально требуемом (в соответствии с соотношением (4)) разбиении конструкции на элементы. Так для приведенного на рисунке 4 примера отклонение значений форм колебаний от аналитических не превышают двух процентов.

Расчёты динамических характеристик ракеты-носителя

Проведём расчёты форм и частот изгибных колебаний РН тандемной компоновки с использованием двух типов матриц масс. Рассматриваемая предварительная КЭМ состоит из 44 балочных КЭ, моделирующих корпус РН. Размеры КЭ в первую очередь определялись исходя из анализа распределения

массово-инерционных и жесткостных характеристик по длине изделия. Расчёт собственных форм и частот в программе инженерного анализа Nastran с использованием несогласованных матриц масс и жёсткостей занял 2,184 с, с применением согласованных матриц – 2,730 с. Учитывая изначально небольшое время расчёта по балочным конечно-элементным моделям, данное увеличение расчётного времени (порядка 25 %) можно считать незначительным. Оценивая вид форм поперечных колебаний в диапазоне до 100 Гц можно увидеть, что на высших тонах колебаний имеется около двадцати полуволн. Таким образом, для получения удовлетворительной точности в согласованной постановке согласно приведенным выше соображениям достаточно наличия 21-го конечного элемента по длине изделия, т.е. длина одного элемента должна быть не более, чем $L/21$, где L – длина корпуса РН. Проводя анализ КЭМ, убеждаемся, что данное условие удовлетворяется. Для получения динамических характеристик в несогласованной постановке в диапазоне до 100 Гц с погрешностью не более 1 % в соответствии с рисунком 3, б в нашем случае требуется 4 элемента на полуволну формы колебаний, т.е. 80 элементов по длине изделия, т.е. длина одного элемента должна быть не более $L/80$. Этому требованию первоначально разработанная модель не удовлетворяет.

Результаты расчёта форм колебаний приведены на рисунке 5, а, сравнение форм, полученных при использовании двух типов матриц, приведено на рисунке 5, б, сравнение частот собственных колебаний – на рисунке 5, в.

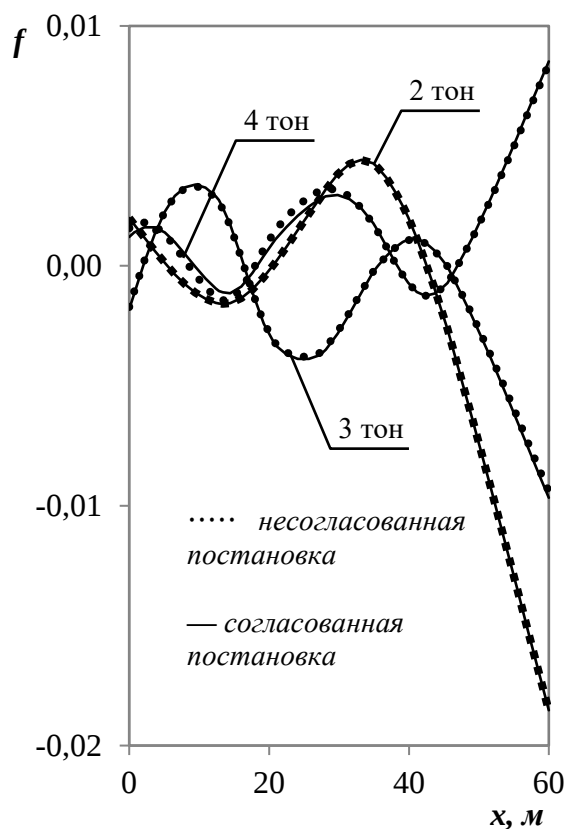
При вычислении погрешности определения форм и частот собственных колебаний за эталонные значения принимались те, которые были получены с использованием матриц масс в согласованной постановке. При вычислении

относительной погрешности для форм колебаний абсолютная погрешность была отнесена к максимальному значению формы колебаний на рассматриваемом участке (между узловыми точками формы).

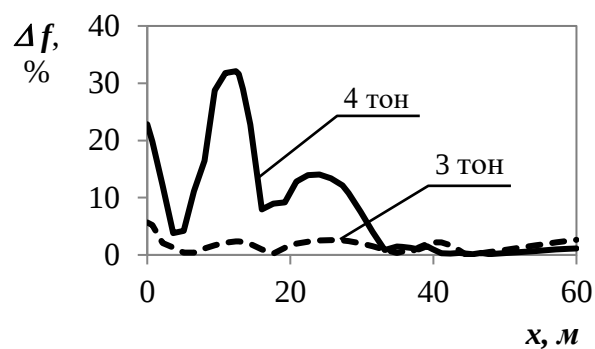
Из рисунка 5, в видно, что наиболее значимые отличия в частотах колебаний наблюдаются для верхних частот рассматриваемого частотного диапазона. Рисунок 5, б показывает, что заметные отличия в форме колебаний для рассматриваемой модели наблюдаются уже для 3-го и 4-го тона колебаний.

Далее была разработана уточнённая КЭМ, содержащая элементы, длина которых составляла не более $L/80$. С учётом особенностей конструкции полученная КЭМ насчитывает 120 балочных элементов по длине РН. Проведены расчёты с использованием двух типов матриц по уточнённой КЭМ. Расчёт показал полное совпадение всех форм и частот в диапазоне до 100 Гц (с погрешностью не более 1 %), полученных по уточнённой КЭМ с использованием согласованных и несогласованных матриц масс.

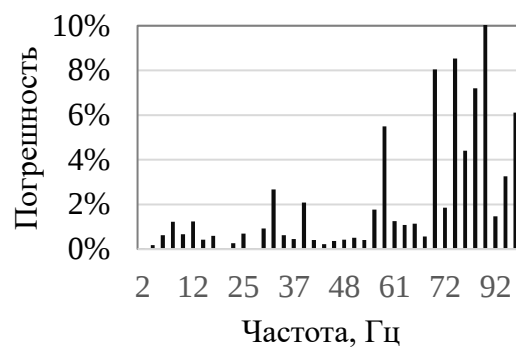
Таким образом мы находим подтверждение того, что выбор размера конечных элементов был сделан верно, а расчёт с использованием согласованных матриц масс может использоваться в качестве альтернативного подхода к подтверждению достаточности дискретизации КЭМ, вместо процедуры дополнительного разбиения КЭ.



(а)



(б)



(в)

Рисунок 5 – Результаты расчёта форм и частот собственных колебаний ракеты-носителя: а) формы колебаний для 2-4 тонов; б) погрешность определения форм; в) погрешность определения частот.

Согласованные матрицы могут быть при необходимости эффективно использованы для снижения числа конечных элементов в составе КЭМ РН, а также для увеличения точности динамического расчёта в области высоких частот, однако при этом сосредоточенные матрицы масс топлива рекомендуется вычислять в соответствии с соотношением (3).

Выбор согласованных матриц может быть полезным при необходимости проведения расчётов с использованием готовых конечно-элементных моделей предприятий-соисполнителей, имеющих недостаточно подробную дискретизацию. Дополнительное разбиение конечных элементов в этом случае не только чрезвычайно

трудоёмко, но и может привести к возникновению трудностей, связанных с интерпретацией полученных результатов и обусловленных изменением нумерации узлов и элементов.

Заключение

В данной работе исследовано влияние выбора типа матриц масс конечных элементов на точность расчёта динамических характеристик. Первоначально задача поиска собственных частот и форм колебаний была решена для тестового случая незакреплённой балки с постоянной погонной массой и постоянной изгибной жёсткостью. Для этого случая существует аналитическое решение, которое и использовалось как эталонное при оценке точности моделирования. Было сделано две модели: с традиционной диагональной и согласованной матрицей масс КЭ. Выявлено, что рациональное количество элементов при использовании согласованных матриц масс определяется однозначно как величина, равная увеличенному на один количеству тонов изгибных колебаний, входящих в интересующий расчётчика частотный диапазон. Такой однозначной взаимосвязи количества элементов с тоном колебаний для случая использования ДММ не наблюдалось, но были получены приближенные соотношения на основе метода наименьших квадратов. В дальнейшем разработанные рекомендации по выбору размера КЭ были использованы для создания КЭМ РН с диагональной матрицей масс КЭ, а также эталонной динамической модели РН (с согласованной матрицей масс КЭ), которая была использована при верификации КЭМ. Это позволило найти адекватное количество КЭ для КЭМ с диагональной матрицей масс КЭ реальной конструкции РН большого продольного удлинения тандемной компоновки.

Расчёты с использованием двух типов матриц (в согласованной и несогласованной постановке) предложено использовать в качестве способа верификации (подтверждения достаточности дискретизации) балочной конечно-элементной модели.

Приведенные в работе результаты расчётов, полученные с применением несогласованных матриц, показывают, что при моделировании конструкции недостаточным числом элементов точность расчёта частот может оказаться недостаточной, значения форм колебаний при этом могут иметь недопустимую погрешность даже в узловых точках.

Точность расчёта динамических характеристик конструкций методом конечных элементов может быть повышена за счёт применения согласованных матриц масс, при этом увеличение расчётного времени при использовании преимущественно балочных конечных элементов можно считать незначительным, точность расчёта форм в узловых точках является достаточно высокой даже при минимальном разбиении конструкции на элементы.

Стоит отметить, что приведенные в работе результаты получены без учёта влияния жёсткости на сдвиг и могут быть использованы для балочных конструкций большого относительного удлинения, для которых сдвиговые деформации не оказывают существенного влияния на результат расчёта динамических характеристик.

Финансирование

Результаты исследования были получены при финансовой поддержке Российской Федерацией в лице Минобрнауки России (грант на проведение крупных

научных проектов по приоритетным направлениям научно-технологического развития, соглашение № 075-15-2024-558).

Список источников

1. Deshpande S. S., Rawat S. R., Bandewar N. P., Soman M. Y. Consistent and Lumped Mass Matrices In Dynamics and Their Impact on Finite Element Analysis Results // International Journal of Mechanical Engineering and Technology. – 2016. – V. 7. – № 2. – P. 135–147 .
2. Hien T. D., Duy N. Q., Anh N. T. P. Finite Element Analysis of a Continuous Sandwich Beam resting on Elastic Support and Subjected to Two Degree of Freedom Sprung Vehicles // Engineering, Technology & Applied Science Research. – 2023. – V. 13. – № 2. – P. 10310–10315.
3. Zhang B., Kou Y., Jin K. Dynamic behavior of beam with an elastic foundation under the extended moving load for electromagnetic launch rail-structure // Journal of Sound and Vibration. – 2025. – V. 596. – P. 118756.
4. Курепин М. П., Сербиновский М. Ю. Эффективные методики конечно-элементного моделирования сложных конструкций энергетического машиностроения // Современные наукоемкие технологии. – 2017. – № 10. – С. 19–25.
5. Попков А. А. Анализ динамического поведения демпфирующей перегородки в баке ракеты-носителя // Теория и практика современной науки: сборник статей Международной научно-практической конференции, Пенза, 17 июня 2020 г.: в 2 т. / редкол.: О. Н. Широков [и др.]. – Пенза: Наука и Просвещение, 2020. – Т. 1. – С. 71–75.

6. Павлов А. М. Особенности расчета форм собственных упругих колебаний корпуса ракет-носителей пакетной компоновки // Гагаринские чтения – 2017: тезисы докладов XLIII Международной молодежной научной конференции, Москва, 05–19 апреля 2017 г. / под общ. ред. М. Ю. Куприкова. – Москва: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2017. – С. 182–183.
7. Дудаев М. А. Математическая модель балочного конечного элемента Тимошенко // Информационные и математические технологии в науке и управлении. – 2023. – № 3 (31). – С. 94–102.
8. Мишичев А. И., Бабурина Н. В. Сравнение конечно-элементных моделей тонкостенного цилиндра при анализе собственных форм и частот // Вестник АГТУ. – 2008. – № 2 (43). – С. 23–26.
9. Zhu J., Wang J., Li Y., Zhang X. Simulation Analysis on Launch Dynamics of Portable Rocket Launcher Using DEM and FEM // Journal of Physics: Conference Series. – 2022. – V. 2343. – № 1. – P. 012024.
10. Zaitsev B. F., Smetankina N. V., Protasova T. V., Shupikov S. A. Influence of Delamination Defects on the Dynamic Stress-Strain State of Composite Elements of Launch Vehicles // Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods / ed. by Holm Altenbach, Victor A. Eremeyev, Nikolay F. Morozov. – Cham: Springer, 2024. – (Advanced Structured Materials. Vol. 204). – P. 505–532.
11. Ji H., Li D. A novel nonlinear finite element method for structural dynamic modeling of spacecraft under large deformation // Thin-Walled Structures. – 2021. – V. 165. – P. 107926.
12. Biertümpfel F., Pfifer H., Bennani S. Finite horizon worst case analysis of launch vehicles // IFAC-PapersOnLine. – 2019. – V. 52. – № 12. – P. 31–36.

13. Biertümpfel F., Koltai P., Schlanbusch R., Ritz K. E. Finite horizon worst case analysis of linear time-varying systems applied to launch vehicle // IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2023. – V. 31. – № 6. – P. 2393–2404.
14. Mancini L., Fahandezh-Shaadi A., Rizza P., Tiso P. Surrogate Finite-Element Modelling for Launch Vehicle Multidisciplinary Optimization // AIAA SCITECH 2022 Forum. – 2022. – P. 2443.
15. Желтков В. И., Чан Т. Х. Определение спектра свободных колебаний пространственной системы прямых однородных стержней // Известия ТулГУ. – 2008. – Вып. 1. – С. 58–65.
16. Цуканова Е. С., Кеглин Б. Г. Динамический конечный элемент // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2013. – № 3 (39). – С. 69–78.

References

1. Deshpande S. S., Rawat S. R., Bandewar N. P., Soman M. Y. Consistent and Lumped Mass Matrices In Dynamics and Their Impact on Finite Element Analysis Results, International Journal of Mechanical Engineering and Technology, 2016, v. 7, no. 2, pp. 135-147.
2. Hien T. D., Duy N. Q., Anh N. T. P. Finite Element Analysis of a Continuous Sandwich Beam resting on Elastic Support and Subjected to Two Degree of Freedom Sprung Vehicles, Engineering, Technology & Applied Science Research, 2023, v. 13, no. 2, pp. 10310-10315.

3. Zhang B., Kou Y., Jin K. Dynamic behavior of beam with an elastic foundation under the extended moving load for electromagnetic launch rail-structure, *Journal of Sound and Vibration*, 2025, v. 596, p. 118756.
4. Kurepin M. P., Serbinovskiy M. Yu. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*, 2017, no. 10, pp. 19-25.
5. Popkov A. A. *Teoriya i praktika sovremennoy nauki: sbornik statey Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii*, Penza, 17 iyunya 2020 g., Penza, "Nauka i Prosveshchenie", 2020, vol. 1, pp. 71-75.
6. Pavlov A. M. *Gagarinskie chteniya 2017: Tezisy dokladov*, Moscow, 05–19 aprelya 2017 g., Moscow, Moskovskiy aviatsionnyy institut (natsional'nyy issledovatel'skiy universitet), 2017, pp. 182-183.
7. Dudaev M. A. *Informatsionnye i matematicheskie tekhnologii v nauke i upravlenii*, 2023, no. 3(31), pp. 94-102.
8. Mishichev A. I., Baburina N. V. *Vestnik AGTU*, 2008, no. 2 (43), pp. 23-26.
9. Zhu J., Wang J., Li Y., Zhang X. Simulation Analysis on Launch Dynamics of Portable Rocket Launcher Using DEM and FEM, *Journal of Physics: Conference Series*, 2022, v. 2343, no. 1, p. 012024.
10. Zaitsev B. F., Smetankina N. V., Protasova T. V., Shupikov S. A. Influence of Delamination Defects on the Dynamic Stress-Strain State of Composite Elements of Launch Vehicles, *Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials*, Springer, 2024, v. 204, pp. 505-532.
11. Ji H., Li D. A novel nonlinear finite element method for structural dynamic modeling of spacecraft under large deformation, *Thin-Walled Structures*, 2021, v. 165, p. 107926.

12. Biertümpfel F., Pfifer H., Bennani S. Finite horizon worst case analysis of launch vehicles, IFAC-PapersOnLine, 2019, v. 52, no. 12, pp. 31-36.
13. Biertümpfel F., Koltai P., Schlanbusch R., Ritz K. E. Finite horizon worst case analysis of linear time-varying systems applied to launch vehicle, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2023, v. 31, no. 6, pp. 2393-2404.
14. Mancini L., Fahandezh-Shaadi A., Rizza P., Tiso P. Surrogate Finite-Element Modelling for Launch Vehicle Multidisciplinary Optimization, AIAA SCITECH 2022 Forum, 2022, p. 2443.
15. Zheltkov V. I., Chan T. Kh. Izvestiya TulGU, 2008, issue 1, pp. 58-65.
16. Tsukanova E. S., Keglin B. G. Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2013, no. 3 (39), pp. 69-78.