

Труды МАИ. 2025. № 143
Trudy MAI. 2025. No. 143. (In Russ.)

Научная статья

УДК 629.05

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=185648>

EDN: <https://www.elibrary.ru/BFTRXN>

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАВИГАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПО СИГНАЛАМ НАЗЕМНЫХ РАДИОМАЯКОВ

Артем Михайлович Айрапетов¹, Виктор Александрович Пименов²✉

¹Общеобразовательное частное учреждение Средняя общеобразовательная школа
«Мир Интеллект Открытие Образование», Москва, Россия

²АО «Национальное Радиотехническое бюро», Москва, Россия

²va.pimenov@yandex.ru✉

Аннотация. В статье представлены аналитические методы решения навигационных задач для псевдо-дальномерного и разностно-дальномерного способов определения координат летательных аппаратов по данным пассивных бортовых терминалов, принимающих сигналы радиомаяков, входящих в состав наземной навигационной системы. Рассмотрены алгоритмы решения навигационных задач для минимального и избыточного количества радиомаяков, входящих в систему. Приводятся результаты моделирования процесса определения навигационных параметров ЛА при наличии ошибок измерения.

Ключевые слова: навигация, наземная радионавигационная система, радиомаяк, летательный аппарат, псевдо-дальномерный метод, разностно-дальномерный метод, аналитическое решение

Для цитирования: Айрапетов А.М. Пименов В.А. Аналитические методы определения навигационных параметров летательных аппаратов по сигналам наземных радиомаяков // Труды МАИ. 2025. № 143. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=185648>

Original article

ANALYTICAL METHODS FOR DETERMINING THE NAVIGATION PARAMETERS OF AIRCRAFT BASED ON SIGNALS FROM GROUND-BASED RADIO BEACONS

Artyom M. Airapetov¹, Victor A. Pimenov²✉

¹School «World – Intelligence – Discovery – Education»,
Moscow, Russia

²National Radio Technical Bureau,
Moscow, Russia

²va.pimenov@yandex.ru✉

Abstract. Ground-based radio beacon systems can provide redundant local or regional navigation. Such systems may include geographically dispersed radio beacons (RB) that simultaneously (simultaneously or in a known sequence) emit navigation signals into the surrounding space to be used by air and ground objects. Aircraft both manned and

unmanned, are among the most promising consumers of radio signals of ground navigation systems (GNS), due to their high-altitude flight, which ensures an extended reception range. The article presents analytical methods of solving navigation problems for pseudo-range and difference-range methods of determining the coordinates of the aircraft from the data of passive onboard terminals receiving the signals of radio beacons, which are part of the ground navigation system. Algorithms for solving navigation problems for minimal and redundant number of beacons included in the system are considered. The results of modeling the process of determining the navigation parameters of aircraft in the presence of measurements errors are provided.

To determine the coordinates of the aircraft by pseudo-rangefinder method, the minimum number of beacons in the GNS, emitting radio signals, should be equal to four, according to the number of unknowns. The system of equations contains three linear and one nonlinear equation. The analytical method of its solution is defined. When solving the nonlinear equation with respect to the discrepancy between the onboard and ground time scales, an extraneous root appears. An effective method of its elimination is found.

It is shown that, when using radio signals from five radio beacons, the determination of the aircraft coordinates and the temporal inconsistency of the scales by the pseudo-rangefinder method is reduced to the solution of a linear system of four equations. In this case there is no problem of finding an extraneous root.

When finding the aircrafts coordinates by the differential-rangefinder method, the minimum number of radio beacons in the GNS is four. However, in order to exclude the

influence of extraneous solution of the nonlinear equation at large measurement errors occurring at a distance from the location of the RB5, it may be reasonable to use five RBs, in this case the determination of the coordinates of the aircraft is reduced to the solution of a linear system of three equations, and the solutions are tied to the onboard time scale. In the presence of pseudo-ranges from the equations it is also possible to find the inconsistency of onboard and ground time scales. In a particular case, when all beacons are in the horizontal plane, four radio-beacons are enough, and analytical solutions of the equations have a more compact form. The results of modeling the process of determining the parameters of aircraft motion when flying over the airfield at an altitude of 1000 m with simulated pseudo-range measurement errors are presented.

A generalization of the linear algorithm for the estimation of Aircraft coordinates from the relative ranges measured by the differential-rangefinder method for the redundant group of RBs is carried out. A significant change in the contribution of individual partial solutions to the overall solution during the aircrafts motion is shown by modeling. The proposed approach for a redundant number of RBs can also be used for the pseudo-rangefinder method of determining navigation parameters.

To improve the accuracy of coordinate determination by the considered methods, it is advisable to smooth both input and output data using the least squares method.

Keywords: navigation, ground radio navigation system, radio beacon, aircraft, pseudo-rangefinder and differential-rangefinder methods, analytical solution

For citation: Airapetov A.M., Pimenov V.A. Analytical methods for determining the navigation parameters of aircraft based on signals from ground-based radio beacons.

Введение

Опыт эксплуатации глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) ГЛОНАСС и GPS, а также теоретические и экспериментальные исследования, проведённые в России и за рубежом, показывают, что наряду с очевидными достоинствами ГНСС имеют ряд недостатков, главными из которых являются:

- чрезвычайно высокие сложность и стоимость поддержания и обслуживания космических и наземных средств, уязвимость в конфликтах высокой интенсивности;

- недостаточная помехоустойчивость – локальные помехи небольшой мощности могут заглушить слабые навигационные сигналы и сделать невозможным получение информации о местонахождении.

В этой связи возникает интерес к использованию радиомаячных систем наземного базирования, которые способны обеспечить резервную локальную или региональную навигацию, а также найти самостоятельное применение в случаях, когда ГНСС применять нецелесообразно. Примером такой наземной навигационной радиомаячной системы является развернутая в США «Locata Net», имеющая большое количество стационарных наземных радиомаяков (PM),

разнесенных по большой площади и объединенных общей высокоточной системой синхронизации [1, 2].

Также для повышения надежности навигационных определений радиомаячные системы находят применение для автоматической посадки ЛА [3]. Примерами их использования в недалеком будущем являются предложения по обеспечению навигации на Луне, Марсе и других космических объектах [4, 5, 6, 7].

Такие системы могут включать территориально разнесенные на местности радиомаяки, синхронно (одновременно или в известной последовательности) излучающие в окружающее пространство навигационные сигналы, которые будут использоваться воздушными и наземными объектами. Задачи определения местоположения возникают не только под открытым небом, но и в закрытых областях, где спутниковые сигналы сильно искажены или недоступны, например, в ангарах, цехах, горных ущельях и т.п. [8, 9].

Летательные аппараты (ЛА), пилотируемые и беспилотные, находятся в ряду наиболее перспективных потребителей радиосигналов наземных навигационных систем (ННС), поскольку имеют во время полета большую дальность приема сигналов, обусловленную их высотой полета. Обязательными условиями навигации являются: обеспечение возможности выделения и идентификации сигналов на борту ЛА (кодовое, частотное или временное) и знание положения РМ в заданной местной прямоугольной системе координат (МПСК).

Бортовые терминалы, установленные на ЛА, измеряют псевдо-дальности либо относительные дальности до наземных радиомаяков в бортовой шкале времени. В первом случае по измеренным псевдо-дальностям могут быть определены координаты ЛА и рассогласование бортовой шкалы времени со шкалой времени ННС, во втором случае – координаты ЛА, привязанные к бортовому времени.

Ниже рассматриваются вопросы, связанные с аналитическими методами решения задач определения координат ЛА по радиосигналам РМ, а также величин рассогласования бортовой и наземной шкал времени.

Обзор доступной литературы по данному вопросу показывает, что аналитические методы рассматриваются достаточно широко в монографиях [10, 11, 12, 13, 14], научных статьях [15, 16, 17] и в описаниях патентов на изобретения^{1), 2), 3)}. Как правило, они посвящены вопросам получения и использования конечных формул для частных случаев решения навигационных задач дальномерным, псевдо-дальномерным и разностно-дальномерным методами применительно к ННС, имеющим определенный порядок размещения РМ и их групп. При этом приводятся конечные формулы, без достаточного пояснения, как они получены. Такой подход не позволяет в целом взглянуть на проблему и затрудняет сравнение результатов разных авторов между собой. В

настоящей статье сделана попытка устранить этот пробел.

¹⁾Патент № 2436260 C1, , МПК H04W 64/00 (2006.01).

²⁾Патент RU № 2624461 C1, МПК G01S 5/10, H04W 64/00

³⁾Патент RU 2439798 C1, МПК H04B 7/00

Аналитическое определение координат ЛА с использованием псевдо-дальномерного метода измерения по сигналам ННС

В навигационных системах собственная шкала времени обычно не совпадает со шкалами времени потребителей. Это связано с тем, что обеспечить синхронность часов ННС с часами потребителей, имеющих значительно меньшую точность сложно. Поэтому шкалы времени имеют случайные сдвиги. Это приводит к тому, что измеренные дальности до радиомаяков на борту ЛА содержат случайный сдвиг и называются псевдо-дальностями.

С учетом неизвестного рассогласования бортовой и наземной шкал времени $\Delta\tau$, наклонные псевдо-дальности можно записать, как [11]:

$$\begin{aligned}r_{1\text{пд}} &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} + c \Delta\tau \\r_{2\text{пд}} &= \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2} + c \Delta\tau \\r_{3\text{пд}} &= \sqrt{(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 + (z_3 - z_0)^2} + c \Delta\tau \\r_{4\text{пд}} &= \sqrt{(x_4 - x_0)^2 + (y_4 - y_0)^2 + (z_4 - z_0)^2} + c \Delta\tau,\end{aligned}\tag{1}$$

где

$r_{1\text{пд}}, r_{2\text{пд}}, r_{3\text{пд}}, r_{4\text{пд}}$ – псевдо-дальности от радиомаяков до ЛА;

c – скорость света;

$x_1, y_1, z_1, \dots, x_4, y_4, z_4$ – координаты 4-х неподвижных радиомаяков в МПСК;

x_0, y_0, z_0 – координаты ЛА в МПСК, привязанные к моменту измерения в бортовой шкале времени. Поскольку рассматриваются одномоментные методы

навигационных определений время привязки опускается. Очевидно, что минимальное число РМ должно быть равно 4-м по числу неизвестных в системе (1).

Кроме того, считаем, что координаты РМ известны и совпадают с координатами фазовых центров их всенаправленных антенн. Задано также геодезическое местоположение и ориентация осей МПСК.

Если величина Δt положительна, то бортовая шкала опережает наземную шкалу времени (отсчет начинается раньше), если отрицательна – отстает от наземной шкалы. Данный метод определения навигационных параметров ЛА называется псевдо-дальномерным. Необходимо отметить, что в навигационных системах псевдо-дальности измеряются с ошибками, поэтому на практике поступают следующим образом: 1) предварительно сглаживают измеренные псевдо-дальности методом наименьших квадратов, а затем решают систему уравнений; 2) решают систему уравнений (1) с измеренными псевдо-дальностями в левых частях, а полученные решения, содержащие ошибки, фильтруют.

Отметим, что для ГНСС уравнения (1) выглядят сложнее, поскольку координаты движущихся навигационных спутников (НС) привязаны к шкале бортового времени на момент излучения навигационных сигналов, а координаты ЛА привязаны к моменту приема в собственной шкале времени [9, 12]. Поэтому для навигационных определений в приемо-индикаторах ГНСС обычно применяются фильтровые рекуррентные, а также итерационные методы [9, 11, 19]. Эти же методы можно использовать применительно к ННС [15, 18].

Однако учитывая, что уравнения (1) для ЛА в ННС относительно просты, целесообразнее решать навигационные задачи аналитическими методами. Далее в статье рассматриваются именно такие методы.

Уравнения (1) справедливы в любой прямоугольной системе координат. Введем дополнительную прямоугольную систему координат $OXYZ$, связанную с плоскостью, проходящую через фазовые центры антенн 1, 2 и 3 радиомаяков.

Начало координат новой системы поместим в фазовом центре антенны 1-го радиомаяка $PM_1 (0,0,0)$, ось X направим на фазовый центр антенны 2-го радиомаяка, ось Z – перпендикулярно плоскости вверх, ось Y будет дополнять систему до правой. Координаты фазовых центров антенн радиомаяков $PM_1(0, 0, 0)$, $PM_2 (X_2, 0, 0)$, $PM_3 (X_3, Y_3, 0)$ и $PM_4 (X_4, Y_4, Z_4)$ в новой системе можно определить с использованием пересчета из МПСК, предварительно проведя геодезические работы на местности [20].

В новой системе координат уравнения (1) примут следующий вид:

$$\begin{cases} (r_{пд1} - c\Delta\tau)^2 = (X_0)^2 + (Y_0)^2 + (Z_0)^2 \\ (r_{пд2} - c\Delta\tau)^2 = (X_2 - X_0)^2 + Y_0^2 + Z_0^2 \\ (r_{пд3} - c\Delta\tau)^2 = (X_3 - X_0)^2 + (Y_3 - Y_0)^2 + Z_0^2 \\ (r_{пд4} - c\Delta\tau)^2 = (X_4 - X_0)^2 + (Y_4 - Y_0)^2 + (Z_4 - Z_0)^2 \end{cases} \quad (2)$$

Вычитая последовательно из 2, 3 и 4 уравнений системы (2) первое уравнение, и проведя преобразования, найдем:

$$\begin{cases} X_0 = A + B c\Delta\tau \\ Y_0 = D + F c\Delta\tau \\ Z_0 = G + H c\Delta\tau \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{где } A = \frac{r_{\text{пд1}}^2 - r_{\text{пд2}}^2 + X_2^2}{2X_2}, B = \frac{(r_{\text{пд2}} - r_{\text{пд1}})}{X_2}; D = \frac{r_{\text{пд1}}^2 + X_3^2 + Y_3^2 - r_{\text{пд3}}^2 - 2X_3A}{2Y_3}; F = \frac{r_{\text{пд3}} - r_{\text{пд1}} - X_3B}{Y_3}$$

(4)

$$G = \frac{r_{\text{пд1}}^2 - r_{\text{пд4}}^2 + X_4^2 + Y_4^2 + Z_4^2 - 2X_4A - 2Y_4D}{2Z_4}; H = \frac{(r_{\text{пд4}} - r_{\text{пд1}} - X_4B - Y_4F)}{Z_4}$$

Обозначим $c\Delta\tau = \alpha$ и подставив выражения (3) в первое уравнение системы (2), получим квадратное уравнение относительно α :

$$N\alpha^2 + 2M\alpha + L = 0, \quad (5)$$

два корня которого равны: $\alpha_{1,2} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - NL}}{N}$, где

$$M = r_{\text{пд1}} + AB + DF \quad N = B^2 + F^2 + H^2 - 1; \quad L = A^2 + D^2 + G^2 - r_{\text{пд1}}^2 + GH;$$

Один из корней уравнения (5) является посторонним для системы (2), поэтому его необходимо найти и исключить из дальнейшего рассмотрения.

Общий подход к определению посторонних корней уравнений с радикалами заключается в подстановке корней уравнения (5) в уравнение (1). При этом посторонний корень может быть найден при нарушении равенств [21]. Однако этот метод не относится к универсальным.

Анализ и моделирование показывают, что эффективным способом отсеивания постороннего корня является повторное решение уравнения (5) при скорректированных значениях псевдо-дальностей $r_{\text{пд1}}, r_{\text{пд2}}, r_{\text{пд3}}, r_{\text{пд4}}$. При этом исходим из того, что именно основной корень содержится в псевдо-дальностях. Если из всех псевдо-дальностей вычесть основной корень и повторно решить

систему уравнений, то основной корень станет равным 0, а посторонний корень уменьшится на величину вычтенного основного корня. Однако, если после вычитания корня из всех 4-х псевдо-дальностей новое решение системы не будет содержать нулевого решения, то вычтенный корень является посторонним. Следовательно, в этом случае, оставшийся корень является основным. После определения рассогласования шкал времени определяются координаты ЛА (3), которые затем пересчитываются в МПСК. Полученные координаты на борту ЛА могут пересчитываться также в глобальные системы координат, принятые в ГНСС [12, 20]. Рассмотренный аналитический метод проверен с помощью моделирования процесса измерения псевдо-дальностей на борту движущегося ЛА с оценкой координат и величины рассогласования шкал времени. По результатам модельных экспериментов установлено, что отсеивание постороннего корня уравнения (5) и определение навигационных параметров осуществляются достаточно эффективно. Однако при больших ошибках измерения псевдо-дальностей возможен переход на посторонний корень при решении уравнения (5). Чтобы исключить такую ситуацию целесообразно либо размещать все 4 радиомаяка на одной фиксированной высоте, либо в составе ННС использовать 5 радиомаяков, что избавляет от необходимости определения постороннего корня в уравнении (5) и повышает точность навигационных определений. В этих двух случаях система уравнений (1) может быть приведена к линейной. Далее рассмотрим оба этих случая. Анализ будем осуществлять в МПСК. Если в системе уравнений (1) в правой части отбросить поправки временного сдвига шкал

времени, то в левой части будут находиться неизвестные наклонные дальности до радиомаяков r_1, r_2, r_3, r_4 .

Приведем последовательно систему уравнений для наклонных дальностей к видам (6) и (7), выбрав второй РМ в качестве опорного:

$$\begin{aligned} A &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2x_1 x_0 - 2y_1 y_0 - 2z_1 z_0 \\ B &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2x_2 x_0 - 2y_2 y_0 - 2z_2 z_0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} C &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2x_3 x_0 - 2y_3 y_0 - 2z_3 z_0 \\ D &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2x_4 x_0 - 2y_4 y_0 - 2z_4 z_0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A - B = 2((x_2 - x_1)x_0 + (y_2 - y_1)y_0 + (z_2 - z_1)z_0) \\ C - B = 2((x_2 - x_3)x_0 + (y_2 - y_3)y_0 + (z_2 - z_3)z_0) \\ D - B = 2((x_2 - x_4)x_0 + (y_2 - y_4)y_0 + (z_2 - z_4)z_0), \text{ где} \end{cases} \quad (7)$$

$$A = r_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2; B = r_2^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2; C = r_3^2 - x_3^2 - y_3^2 - z_3^2; D = r_4^2 - x_4^2 - y_4^2 - z_4^2$$

Система уравнений (7) может использоваться для аналитического определения координат ЛА при дальномерном методе измерений, когда $\Delta\tau = 0$.

Далее преобразуем соотношения (7), введя в них псевдо-дальности вместо наклонных дальностей, в результате уравнения можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} K = (x_2 - x_1)x_0 + (y_2 - y_1)y_0 + (z_2 - z_1)z_0 + c(r_{1\text{пд}} - r_{2\text{пд}})\Delta\tau \\ L = (x_2 - x_3)x_0 + (y_2 - y_3)y_0 + (z_2 - z_3)z_0 + c(r_{3\text{пд}} - r_{2\text{пд}})\Delta\tau \\ M = (x_2 - x_4)x_0 + (y_2 - y_4)y_0 + (z_2 - z_4)z_0 + c(r_{4\text{пд}} - r_{2\text{пд}})\Delta\tau, \text{ где} \end{cases} \quad (8)$$

$$K = [(r_{1\text{пд}}^2 - r_{2\text{пд}}^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)] / 2$$

$$L = [(r_{3\text{пд}}^2 - r_{2\text{пд}}^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_3^2 + y_3^2 + z_3^2)] / 2$$

$$M = [(r_{4\text{пд}}^2 - r_{2\text{пд}}^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_4^2 + y_4^2 + z_4^2)] / 2$$

Линейную систему уравнений (8) необходимо дополнить нелинейным уравнением для опорного РМ2 из системы уравнений (1). В этом случае будем иметь 4 уравнения (из которых три линейных) с 4 неизвестными ($x_0, y_0, z_0, \Delta\tau$).

В частном случае, когда все радиомаяки расположены в одной горизонтальной плоскости ($z_i = z_2$), система уравнений становится линейной.

Решая систему уравнений (9), можно найти неизвестные $x_0, y_0, \Delta\tau$, а затем подставить найденные значения во 2 уравнение системы (1) и найти z_0 .

$$\begin{cases} K = (x_2 - x_1)x_0 + (y_2 - y_1)y_0 + c(r_{1\text{пд}} - r_{2\text{пд}})\Delta\tau \\ L = (x_2 - x_3)x_0 + (y_2 - y_3)y_0 + c(r_{3\text{пд}} - r_{2\text{пд}})\Delta\tau \\ M = (x_2 - x_4)x_0 + (y_2 - y_4)y_0 + c(r_{4\text{пд}} - r_{2\text{пд}})\Delta\tau, \text{ где} \end{cases}$$

(9)

$$K = [(r_{1\text{пд}}^2 - r_{2\text{пд}}^2) + (x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)] / 2$$

$$L = [(r_{3\text{пд}}^2 - r_{2\text{пд}}^2) + (x_2^2 + y_2^2) - (x_3^2 + y_3^2 + z_1^2)] / 2$$

$$M = [(r_{4\text{пд}}^2 - r_{2\text{пд}}^2) + (x_2^2 + y_2^2) - (x_4^2 + y_4^2 + z_1^2)] / 2$$

Рассмотрим в качестве примера модельную ситуацию, когда 4 радиомаяка расположены в одной горизонтальной плоскости на осях МПСК и имеют следующие координаты РМ1 (10, 0, 0) км, РМ2 (-3, 0, 0) км, РМ3 (0, 5, 0) км, РМ4 (0, -5, 0) км. ЛА находится в точке (-3, 0, 5) км. Будем считать, что рассогласование наземной и бортовой шкал составляет $\Delta\tau = +1\text{мкс}$. Это позволяет найти истинные наклонные дальности и псевдо-дальности, которые примут

значения: $r_1 = 13,928$ км, $r_{1\text{пд}} = 14,228$ км (поскольку с $\Delta\tau = 0,3 * 1 = 0,3$ км); $r_2 = 5$ км, $r_{2\text{пд}} = 5,3$ км; $r_3 = 7,681$ км, $r_{3\text{пд}} = 7,981$ км; $r_4 = 7,681$ км, $r_{4\text{пд}} = 7,981$ км. Считая, что известны только псевдо-дальности, необходимо определить координаты ЛА и рассогласование шкал времени $\Delta\tau$. В этих условиях решение уравнения (9) примет вид:

$$\begin{vmatrix} -13 & 0 & 2,6784 \\ -3 & -5 & 0,8043 \\ -3 & 5 & 0,8043 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \Delta\tau \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 41,673 \\ 9,8 \\ 9,8 \end{vmatrix} \quad (10)$$

Решим эту систему уравнений методом Крамера. Определитель матрицы A равен $\text{Det}(A) = 24,207$. Дополнительные определители равны соответственно: $\text{Det}(A_1) = -72,6928$, $\text{Det}(A_2) = 0$, $\text{Det}(A_3) = 24,207$. Следовательно: $x_0 = \text{Det}(A_1)/\text{Det}(A) = -3$ км; $y_0 = \text{Det}(A_2)/\text{Det}(A) = 0$ км; $\Delta\tau = \text{Det}(A_3)/\text{Det}(A) = 1$ мкс. Подставим эти решения во 2 уравнение системы (2), откуда найдем $z_0 = 5$ км. Полученные в итоге решения равны априорно заданным данным.

Очевидно, что добавление 5 радиомаяка в ННС позволяет решить задачу также с использованием только линейной системы уравнений.

Здесь все 4 неизвестные могут быть определены в результате решения системы из 4-х линейных уравнений.

В этом случае система линейных уравнений примет следующий вид:

$$\begin{cases} K = (x_2 - x_1)x_0 + (y_2 - y_1)y_0 + (z_2 - z_1)z_0 + c(r_{1\text{пд}} - r_{2\text{пд}})\Delta\tau \\ L = (x_2 - x_3)x_0 + (y_2 - y_3)y_0 + (z_2 - z_3)z_0 + c(r_{3\text{пд}} - r_{2\text{пд}})\Delta\tau \\ M = (x_2 - x_4)x_0 + (y_2 - y_4)y_0 + (z_2 - z_4)z_0 + c(r_{4\text{пд}} - r_{2\text{пд}})\Delta\tau \\ N = (x_2 - x_5)x_0 + (y_2 - y_5)y_0 + (z_2 - z_5)z_0 + c(r_{5\text{пд}} - r_{2\text{пд}})\Delta\tau, \end{cases} \quad (11)$$

где
$$K = [(r_{1\text{пд}}^2 - r_{2\text{пд}}^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)] / 2$$

$$L = [(r_{3\text{пд}}^2 - r_{2\text{пд}}^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_3^2 + y_3^2 + z_3^2)] / 2$$

$$M = [(r_{4\text{пд}}^2 - r_{2\text{пд}}^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_4^2 + y_4^2 + z_4^2)] / 2$$

$$N = [(r_{5\text{пд}}^2 - r_{2\text{пд}}^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_5^2 + y_5^2 + z_5^2)] / 2$$

Интересно, что первые 3 уравнения в системе (11) совпадают с линейными уравнениями системы (8). По сути, только нелинейное уравнение переходит в линейное при добавлении РМ5. Решение системы уравнений (11) сводится к обращению матрицы размером (4x4), что является с точки зрения вычислений достаточно трудоемкой операцией. Учитывая, что решение задачи в бортовом терминале происходит в реальном времени, целесообразно предварительно понизить размерность матрицы системы до (3x3), исключив из системы уравнений одну из переменных методом Гаусса.

Аналитическое определение координат ЛА при разностно-дальномерном способе измерения

В методе навигации, использующем измеренные относительные дальности (разностно-дальномерный метод), не требуется определять временные невязки наземной и объектовых шкал времени. В процессе измерений может использоваться только шкала времени ЛА. Понятно, что этот метод не позволяет осуществлять обмен навигационной информацией с наземными службами, являясь автономным для ЛА. Рассмотрим данный метод более подробно для 4-х РМ в составе ННС.

Учитывая, что опорный РМ может быть выбран произвольно, будем считать, что это РМ₁. Запишем математическое выражение для относительной дальности ЛА до РМ₂ по сравнению с РМ₁:

$$\Delta r_{21} = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2} - \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \quad (13)$$

В этом выражении неизвестными являются координаты ЛА x_0, y_0, z_0 . Относительная дальность Δr_{21} до ЛА считается известной, поскольку, как указано выше, может быть определена на борту ЛА после приема навигационных сигналов и определения их параметров. Измеренные относительные дальности содержат ошибки, что скажется на точности определения координат ЛА.

Уравнение (13) преобразуем к следующему виду:

$$\frac{k_{21}}{2} = (x_1 - x_2)x_0 + (y_1 - y_2)y_0 + (z_1 - z_2)z_0 - \Delta r_{21}r_1 \quad (14)$$

где
$$r_1 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

$$k_{21} = \Delta r_{21}^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2.$$

Аналогичные уравнения запишем для относительных дальностей $\Delta r_{31}, \Delta r_{41}$ до РМ3, РМ4, соответственно:

$$\frac{k_{31}}{2} = (x_1 - x_3)x_0 + (y_1 - y_3)y_0 + (z_1 - z_3)z_0 - \Delta r_{31}r_1 \quad (15)$$

$$\frac{k_{41}}{2} = (x_1 - x_4)x_0 + (y_1 - y_4)y_0 + (z_1 - z_4)z_0 - \Delta r_{41}r_1 \quad (16)$$

Здесь k_{31}, k_{41} равны:

$$k_{31} = \Delta r_{31}^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_3^2 - y_3^2 - z_3^2 \quad (17)$$

$$k_{41} = \Delta r_{41}^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_4^2 - y_4^2 - z_4^2 \quad (18)$$

Совместно с нелинейным уравнением

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \quad (19)$$

имеем систему из 4х уравнений с четырьмя неизвестными.

Решать эту систему уравнений целесообразно путем перехода к новой системе координат 0XYZ, в которой решалась система уравнений (2).

В новой системе координат уравнения (14), (15) и (16) примут вид:

$$\begin{cases} X_0 = A + B r_1 \\ Y_0 = D + F r_1 \\ Z_0 = G + H r_1 \end{cases} \quad (20)$$

$$A = \frac{X_2^2 - \Delta r_{21}^2}{2X_2}; \quad B = -\frac{\Delta r_{21}}{X_2}; \quad D = \frac{X_3^2 + Y_3^2 - \Delta r_{31}^2 - 2X_3A}{2Y_3}; \quad F = -\frac{\Delta r_{31} + X_3B}{Y_3}$$

$$G = \frac{X_4^2 + Y_4^2 + Z_4^2 - \Delta r_{41}^2 - 2X_4A - 2Y_4D}{2Z_4}; \quad H = -\frac{(\Delta r_{41} + X_4B + Y_4F)}{Z_4}$$

Подставляя уравнения (20) в нелинейное уравнение (19) и выполнив преобразования, получим квадратное уравнение

$$N r_1^2 + 2M r_1 + L = 0, \quad (21)$$

два корня которого равны:

$$r_{1,2} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - NL}}{N},$$

$$\text{где } M = AB + DF + GH; \quad N = B^2 + F^2 + H^2 - 1; \quad L = A^2 + D^2 + G^2$$

Таким образом, решая квадратное уравнение (22) и отбрасывая отрицательный посторонний корень, находим дальность от РМ1 до ЛА, затем определяем координаты X_0, Y_0, Z_0 . Полученные координаты пересчитываем в МПСК. Приведенные соотношения проверены путем моделирования.

Далее рассмотрим случай, при котором все уравнения в системе уравнений будут линейными без наложения условий на размещение РМ. Для этого в ННС добавим 5 радиомаяк – РМ5. Соответствующее линейное уравнение будет иметь вид:

$$\frac{k_{51}}{2} = (x_1 - x_5)x_0 + (y_1 - y_5)y_0 + (z_1 - z_5)z_0 - \Delta r_{51}r_1. \quad (22)$$

$$\text{где } k_{51} = \Delta r_{51}^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_5^2 - y_5^2 - z_5^2.$$

Можно упростить систему до 3х уравнений, исключив неизвестную величину r_1 . Для этого выразим из уравнения (22) неизвестную величину r_1 и подставим в уравнения (14), (15), (16). В результате преобразований получим систему из 3-х уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} B_1 = A_{11}x_0 + A_{12}y_0 + A_{13}z_0 \\ B_2 = A_{21}x_0 + A_{22}y_0 + A_{23}z_0 \\ B_3 = A_{31}x_0 + A_{32}y_0 + A_{33}z_0, \end{cases} \quad (23)$$

$$\text{где } B_1 = k_{21} - \frac{\Delta r_{21} k_{51}}{\Delta r_{51}}, B_2 = k_{31} - \frac{\Delta r_{32} k_{51}}{\Delta r_{51}}, B_3 = k_{41} - \frac{\Delta r_{41} k_{51}}{\Delta r_{51}},$$

$$A_{11} = 2(x_1 - x_2 - \frac{(x_1 - x_5)\Delta r_{21}}{\Delta r_{51}}), A_{12} = 2(y_1 - y_2 - \frac{(y_1 - y_5)\Delta r_{21}}{\Delta r_{51}}),$$

$$A_{13} = 2(z_1 - z_2 - \frac{(z_1 - z_5)\Delta r_{21}}{\Delta r_{51}}), A_{21} = 2(x_1 - x_3 - \frac{(x_1 - x_5)\Delta r_{31}}{\Delta r_{51}}),$$

$$A_{22} = 2(y_1 - y_3 - \frac{(y_1 - y_5)\Delta r_{31}}{\Delta r_{51}}), A_{23} = 2(z_1 - z_3 - \frac{(z_1 - z_5)\Delta r_{31}}{\Delta r_{51}}),$$

$$A_{31} = 2(x_1 - x_4 - \frac{(x_1 - x_5)\Delta r_{41}}{\Delta r_{51}}), A_{32} = 2(y_1 - y_4 - \frac{(y_1 - y_5)\Delta r_{41}}{\Delta r_{51}}),$$

$$A_{33} = 2(z_1 - z_4 - \frac{(z_1 - z_5)\Delta r_{41}}{\Delta r_{51}}).$$

Для решения линейной системы уравнений (23) может быть использован метод Крамера. Следует обращать внимание на величину разностного сигнала Δr_{51} , она должна быть отлична от нуля, поскольку стоит в знаменателе. Если это требование не выполняется, можно взять вариант решения, в котором в знаменателе будет стоять один из других разностных сигналов $\Delta r_{21}, \Delta r_{31}, \Delta r_{41}$. Для вывода соответствующих формул неизвестную величину r_1 необходимо выражать не из уравнения (22), а из уравнений (14), (15), (16). Таким образом, возможны 4 варианта решения, которые будут отличны между собой, поскольку разностные сигналы измеряются со случайными ошибками. Целесообразно получить все 4-е парциальные решения и усреднить их между собой методом, изложенным в настоящей статье ниже. Отметим также, что вариант решения, в котором используются разности разностей Δr_{ij} , приведен в описании к изобретению ⁴⁾.

Моделирование процесса определения координат ЛА разностно-дальномерным способом при расположении РМ в одной плоскости

Рассмотрим частный случай расположения наземных радиомаяков в горизонтальной плоскости, параллельной плоскости OXY топоцентрической местной прямоугольной системы координат (МПСК). При этом 4 радиомаяка РМ1, РМ2, РМ3, РМ4 расположим по углам прямоугольника симметрично началу координат (Рис.1).

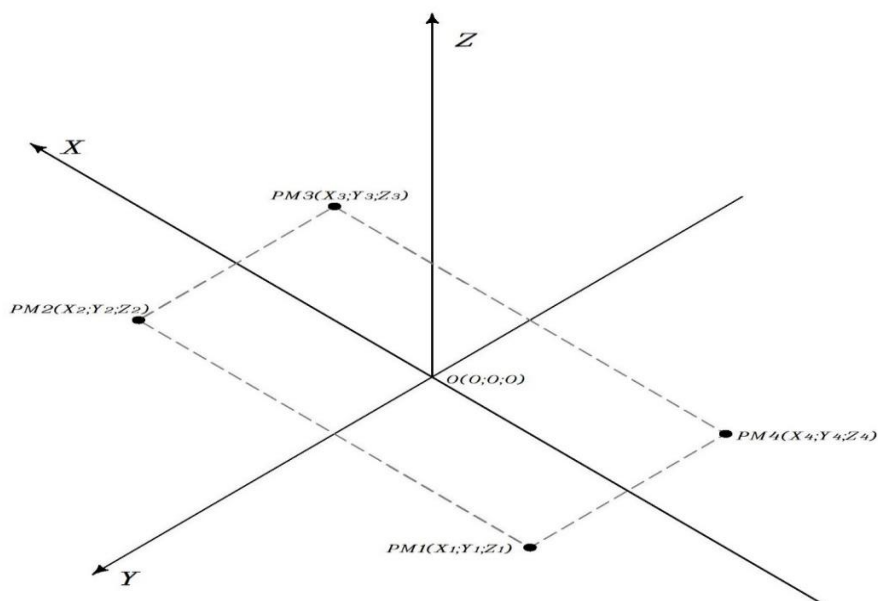


Рис. 1 - Схема расположения радиомаяков на местности.

Считаем, что координаты радиомаяков известны (X_1, Y_1, Z_1) ; (X_2, Y_2, Z_2) ; (X_3, Y_3, Z_3) ; (X_4, Y_4, Z_4) . При этом $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4$. Пусть на ЛА, с использованием разностно-дальномерного метода, измеряются относительные дальности $\Delta r_{12}, \Delta r_{32}, \Delta r_{42}$ до радиомаяков РМ1, РМ3, РМ4 по отношению к дальности опорного радиомаяка РМ2. Для приведенной схемы размещения РМ соотношения (23) вырождаются в систему уравнений 2-го порядка, так как коэффициенты $A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0$.

$$\begin{cases} B_1 = A_{11}x_0 + A_{12}y_0 \\ B_2 = A_{21}x_0 + A_{22}y_0, \end{cases} \quad (24)$$

где $B_1 = \Delta r_{12} (\Delta r_{12} - \Delta r_{42})$; $B_2 = \Delta r_{32} (\Delta r_{32} - \Delta r_{42})$;

⁴Патент № 2746218 C1, РФ, МПК G01S 3/46, G01S 7/00, G01C 21/00, G06G 7/78

$$A_{11} = \frac{4X_2(\Delta r_{42}-\Delta r_{12})}{\Delta r_{42}}; A_{12} = -\frac{4Y_2 \Delta r_{42}}{\Delta r_{42}}; A_{21} = -\frac{4Y_2 \Delta r_{42}}{\Delta r_{42}}; A_{22} = \frac{4Y_2(\Delta r_{42}-\Delta r_{32})}{\Delta r_{42}}$$

Определитель матрицы, составленной из коэффициентов A_{ij} системы (24)

может быть рассчитан по соотношению:

$$\text{Det } A = \frac{16X_2Y_2(\Delta r_{42}-\Delta r_{32}-\Delta r_{12})}{\Delta r_{42}}$$

(25)

Решение системы уравнений (24) методом Крамера имеет вид:

$$x_0 = \frac{\Delta r_{12}}{4X_2} \frac{(\Delta r_{42}-\Delta r_{32})(\Delta r_{12}-\Delta r_{32}-\Delta r_{42})}{(\Delta r_{42}-\Delta r_{32}-\Delta r_{12})}$$

(26)

$$y_0 = \frac{\Delta r_{32}}{4Y_2} \frac{(\Delta r_{42}-\Delta r_{12})(\Delta r_{32}-\Delta r_{42}-\Delta r_{12})}{(\Delta r_{42}-\Delta r_{32}-\Delta r_{12})}$$

(27)

Для определения z_0 необходимо предварительно рассчитать расстояние r_2 от антенны опорного радиомаяка РМ2 до антенны ЛА с использованием формулы:

$$r_2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta r_{12}^2 + \Delta r_{32}^2 - \Delta r_{42}^2}{(\Delta r_{42} - \Delta r_{32} - \Delta r_{12})} \quad (28)$$

Далее координата z_0 рассчитывается по соотношению:

$$z_0 = Z_2 + \sqrt{r_2^2 - (X_2 - x_0)^2 - (Y_2 - y_0)^2}$$

(29)

В формуле (29) следует взять знак минус, если ЛА находится ниже плоскости OXY . В процессе вычислений необходимо следить за тем, чтобы

определитель матрицы (25) не обращался в нуль. В этих точках решение системы отсутствует.

С использованием полученных соотношений проведено моделирование процесса определения координат движущегося ЛА. Принято, что ЛА, совершает полеты на постоянной заданной высоте над районом размещения радиомаяков вдоль длинной стороны оси X (рис.1). Размеры прямоугольной области составляют 3000 x 2000 м. Скорость полета ЛА – 50 м/с. Темп измерения 0,1 с. Измерения начинаются над точкой начала координат.

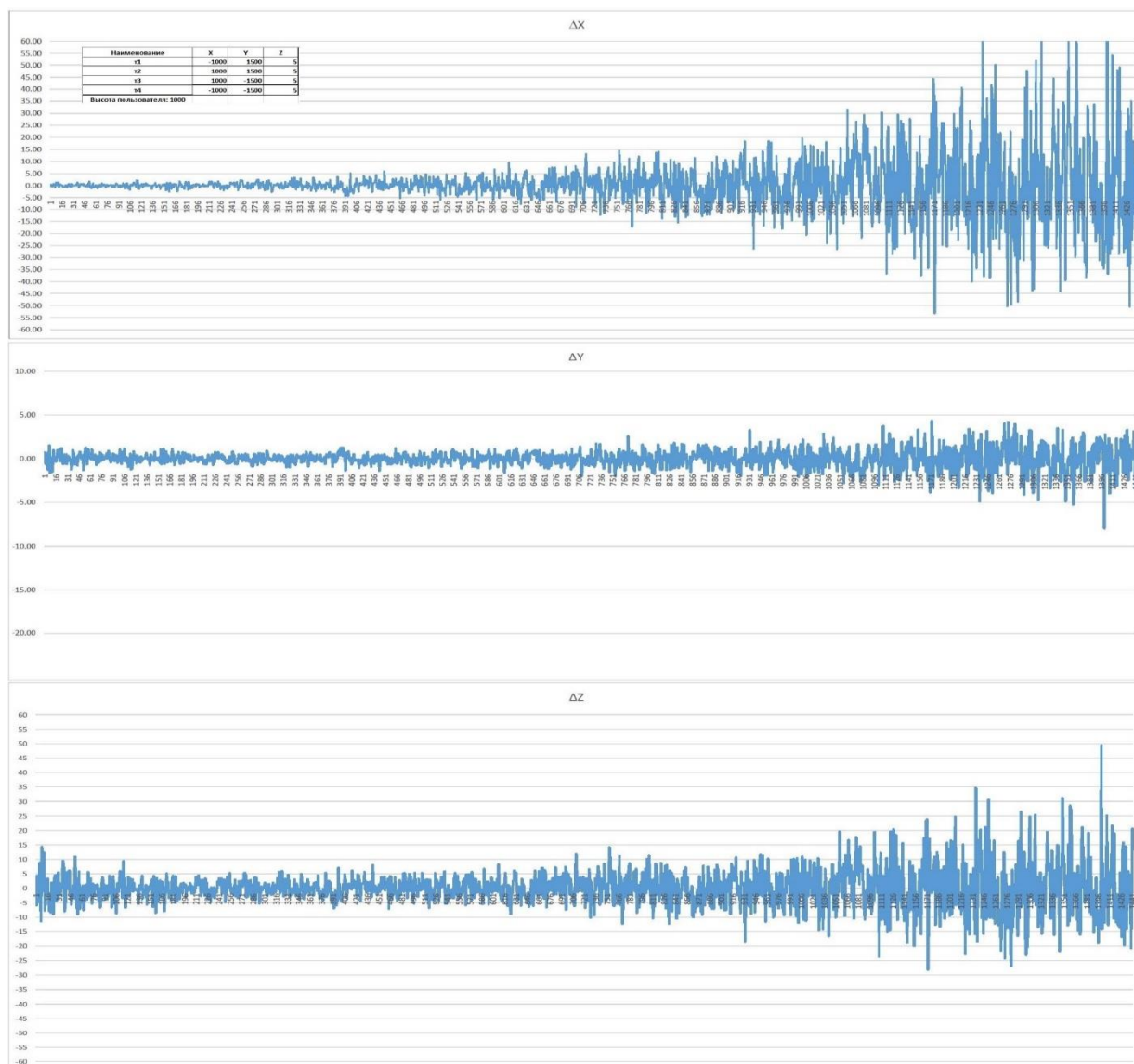


Рис.2 - Ошибки измерения координат ЛА (ΔX , ΔY , ΔZ) на высоте полета 1000м

На рис 2 приведены ошибки измерения координат ЛА (ΔX , ΔY , ΔZ) на высоте полета 1000 м во внутренней области установки РМ и вне этой области (СКО $\sigma_R=0,1$ м). По оси абсцисс отложено время полета. (300 точек по времени соответствуют 1,5 км). Анализ полученных результатов показывает, что в зоне расположения РМ быстроменяющиеся ошибки измерения координат при полете ЛА на высоте 1000 м составляют по осям X, Y менее $\pm 0,5$ м, по оси Z менее ± 5 м.

Анализ показывает, что ошибки возрастают, при перемещении ЛА во внешнюю область относительно зоны расположения радиомаяков.

Отметим, что решение аналогичной задачи для случая плоского размещения 4х радиомаяков попарно по осям X, Y симметрично относительно центра координат рассмотрено в работе ⁵).

Обобщение линейного алгоритма оценки координат ЛА по относительным дальностям на случай наличия избыточной группы наземных радиомаяков

Далее рассмотрим ситуацию, когда имеется возможность использовать измерения относительной дальности от ЛА до большего числа РМ – 6, 7, 8 и т.д. Такие группы РМ, имеющие в своем составе более 5 РМ, будем называть избыточными. Для определенности далее будем рассматривать избыточную группу, состоящую из 7 РМ. Очевидно, что рассмотренный подход можно будет легко распространить на любое другое число РМ.

Первоначально решим вопрос о количестве независимых уравнений типа (23), которые можно составить, имея навигационную информацию от 7 РМ.

Учитывая, что один РМ постоянно является опорным, число независимых уравнений равно числу сочетаний из 6 по 4. $C_6^4 = 15$. В качестве опорного радиомаяка принимается РМ №2. В таблице 1 приведены 15 комбинаций номеров РМ.

Таблица 1 – Комбинации номеров РМ

№п/п	Номера РМ					№п/п	Номера РМ				
1	1	2	3	4	5	9	1	2	4	6	7
2	1	2	3	4	6	10	1	2	5	6	7
3	1	2	3	4	7	11	3	2	4	5	6
4	1	2	3	5	6	12	3	2	4	5	7
5	1	2	3	5	7	13	3	2	4	6	7
6	1	2	3	6	7	14	3	2	5	6	7
7	1	2	4	5	6	15	4	2	5	6	7
8	1	2	4	5	7						

Каждая комбинация РМ из таблицы порождает систему из трех уравнений типа (23). При решении системы уравнений (23) находят 3 неизвестных величины

⁵⁾ Патент № 2432675 С1, Российская Федерация, МПК H04B 7/00.

x_0, y_0, z_0 . Если бы относительные дальности измерялись безошибочно, то решения всех 15 систем уравнений совпали бы между собой. Однако, при наличии ошибок измерений относительных дальностей, что реально имеет место, все 15 решений будут различны. Такие решения называются парциальными. В результате возникает задача определения взвешенного оптимального решения при наличии в качестве исходных парциальных решений. Такая задача для системы линейных уравнений с избыточным числом уравнений решена в [22]. Очевидно, что каждая из 15 комбинаций РМ из таблицы 1 порождает систему из трех уравнений типа (23), следовательно, всего можно записать 45 аналогичных уравнений:

Оптимальное решение избыточной системы уравнений (30) по методу наименьших квадратов должно минимизировать сумму квадратов невязок, возникающих при подстановке этого решения в каждое уравнение:

Приравняв к нулю частные производные S по неизвестным переменным x_0, y_0, z_0 , приходим к системе из трех линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_0 \sum_{k=1}^{45} A_k^2 + y_0 \sum_{k=1}^{45} C_k A_k + z_0 \sum_{k=1}^{45} D_k A_k = \sum_{k=1}^{45} B_k A_k \\ x_0 \sum_{k=1}^{45} C_k A_k + y_0 \sum_{k=1}^{45} C_k^2 + z_0 \sum_{k=1}^{45} D_k C_k = \sum_{k=1}^{45} B_k C_k \\ x_0 \sum_{k=1}^{45} D_k A_k + y_0 \sum_{k=1}^{45} C_k D_k + z_0 \sum_{k=1}^{45} D_k^2 = \sum_{k=1}^{45} B_k D_k \end{cases} \quad (32)$$

Решение системы уравнений (32) можно найти с использованием формул Крамера:

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Задача имеет второй способ решения, эквивалентный рассмотренному выше. Можно доказать [22], что оптимальное решение системы избыточных уравнений (32), полученное методом наименьших квадратов, равно сумме парциальных решений с весовыми коэффициентами в виде квадратов основных определителей этих систем, нормированных их суммой. В результате, если имеется N систем уравнений с 3 одинаковыми неизвестными (в нашем случае N=15), то оптимальное по методу наименьших квадратов общее решение будет иметь вид:

$$x_0 = \sum_{i=1}^N x_{i0} \lambda_i \quad y_0 = \sum_{i=1}^N y_{i0} \lambda_i \quad z_0 = \sum_{i=1}^N z_{i0} \lambda_i \quad \lambda_i = \frac{\Delta_i^2}{\sum_{i=1}^N \Delta_i^2}$$

где x_{i0} , y_{i0} , z_{i0} – парциальное решение для i системы уравнений;

λ_i – весовой коэффициент;

Δ_i – основной определитель i системы .

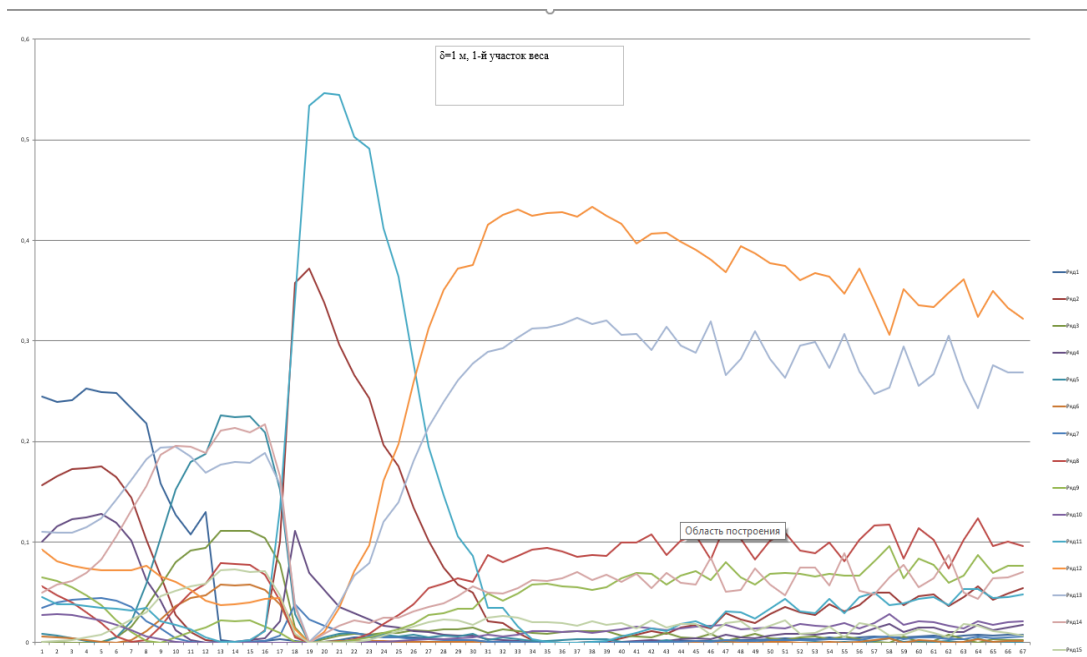


Рис. 3. Графики изменения весовых коэффициентов λ_i в процессе полета ЛА

Моделирование полета ЛА, определяющего собственные координаты по радиосигналам ННС, имеющей в своем составе 7 РМ, путем взвешивания парциальных решений, показало, что точность определения координат значительно повышается, примерно в 3 раза. При этом все весовые коэффициенты существенно изменяются в процессе движения ЛА относительно ННС (рис. 3).

Заключение

Для определения координат ЛА псевдо-дальномерным способом минимальное число радиомаяков в наземной навигационной системе, излучающих радиосигналы, должно равняться четырем, по числу неизвестных. При этом система уравнений содержит три линейных и одно нелинейное уравнения. Определен аналитический метод ее решения. При решении

нелинейного уравнения относительно невязки бортовой и наземной шкал времени появляется посторонний корень. Найден эффективный способ его отсеивания.

Показано, что при использовании радиосигналов от 5 радиомаяков определение координат ЛА и временной невязки шкал псевдо-дальномерным способом сводится к решению линейной системы из 4-х уравнений. При этом отсутствует проблема нахождения постороннего корня.

При нахождении координат ЛА разностно-дальномерным способом минимальное число радиомаяков в навигационной системе равняется 4-м. Однако для исключения влияния постороннего решения нелинейного уравнения при больших ошибках измерения, возникающих на удалении от места размещения РМ может быть целесообразным использование 5 РМ, при этом определение координат ЛА сводится к решению линейной системы из 3-х уравнений, а решения привязываются к бортовой шкале времени. При наличии псевдо-дальностей из уравнения (1) можно также найти невязку бортовой и наземной шкал времени. В частном случае, когда все радиомаяки находятся в горизонтальной плоскости достаточно 4-х радиомаяков, при этом аналитические решения уравнений имеют более компактный вид. Приведены результаты моделирования процесса определения параметров движения ЛА при полете над аэродромом на высоте 1000 м с имитируемыми ошибками измерения псевдо-дальностей.

Проведено обобщение линейного алгоритма оценки координат ЛА по измеренным разностно-дальномерным методом относительным дальностям для избыточной группы РМ. Путем моделирования показано значительное изменение вклада отдельных парциальных решений в общее решение во время движения ЛА. Предложенный подход может быть также использован для псевдо-дальномерного метода определения навигационных параметров.

Для повышения точности определения координат рассмотренными методами целесообразно осуществлять сглаживание как входных измерений, так и выходных данных с использованием методов наименьших квадратов, а также фильтров Калмана [2, 23].

Следует также отметить, что рассмотренные аналитические методы могут найти применение при нахождении радиомаяка на ЛА и приеме сигналов на наземных пунктах [24].

Список источников

1. ICD-LOC-100A. Locata Net Positioning Control Document 2011. Locata Corp Pty Ltd, September 2011. URL: www.locatacorp.com
2. Mohinder S. Grewal, Lawrence R. Weill, Angus P. Andrews. Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration, Copyright 2007. John Wiley & Sons, Inc. DOI: [10.1002/9780470099728.ch3](https://doi.org/10.1002/9780470099728.ch3)
3. Погосян М.А., Вережкин А.А. Системы автоматической посадки летательных аппаратов: аналитический обзор. Информационное обеспечение //

Труды МАИ. 2020. № 113. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=118156>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-11](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-11)

4. Дмитриев А.О., Москатиньев И.В., Нестерин И.М., Сысоев В.К. Анализ вариантов навигационных систем для Луны // Труды МАИ. 2021. № 118. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=158243>. DOI: [10.34759/trd-2021-118-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-118-09)

5. Вернигора Л.В., Казмерчук П.В., Сысоев В.К., Дмитриев А.О. Методика измерения координат лунных посадочных станций с помощью оптических телевизионных средств космических аппаратов // Труды МАИ. 2020. № 114. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=118986>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-12](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-12)

6. Багров А.В., Дмитриев А.О., Леонов В.А., Москатиньев И.В., Сысоев В.К. Двухволновая оптическая лунная навигационная система // Труды МАИ. 2020. № 112. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=116356>. DOI: [10.34759/trd-2020-112-13](https://doi.org/10.34759/trd-2020-112-13)

7. Багров А.В., Дмитриев А.О., Леонов В.А., Митькин А.С., Москатиньев И.В., Сысоев В.К., Ширшаков А.Е. Глобальная оптическая навигационная система для Луны // Труды МАИ. 2018. № 99. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=91814>

8. Серкин Ф.Б., Важенин Н.А., Вейцель А.В. Анализ характеристик прототипа локальной системы местоопределения // Труды МАИ. 2016. № 86. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=67824>

9. Селезнева М.С., Шэнь Кай, Неусыпин К.А., Пролетарский А.В. Алгоритмы обработки информации навигационных систем и комплексов летательных аппаратов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. - 238 с.

10. Черняк В.С. Многопозиционная радиолокация. - М.: Радио и связь, 1993. - 416 с.
11. Сосновский А.А., Бакулев П.Д. Радионавигационные системы. – М.: Радиотехника, 2005. – 221 с.
12. Тяпкин В.Н., Гарин Е.Н. Методы определения навигационных параметров подвижных средств с использованием спутниковой радионавигационной системы ГЛОНАСС: монография. - Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2022. – 260 с.
13. Torrieri D.J. Statistical Theory of Passive Location Systems. In: Cox I.J., Wilfong G.T. (eds) Autonomous Robot Vehicles. New York: Springer, 1990. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8997-2_13
14. Zekavat R., Buehrer R.M. Handbook of Position Location: Theory, Practice and Advances. Hoboken: John Wiley & Sons; 2019. 1281 p.
15. Кишко Д.В. Анализ точности определения собственных координат при использовании радионавигационной системы с малыми базами между передатчиками // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=53755>
16. Прохорцов А.В., Минина О.В. Аналитическое решение навигационной задачи на основе псевдо-дальномерного метода // Известия Тульского государственного университета. Серия: Технические науки. 2020. № 11. С. 395-398.

17. Прохорцов А.В., Минина О.В. Аналитическое решение навигационной задачи на основе разностно-дальномерного метода // Известия Тульского государственного университета. Серия: Технические науки. 2020. № 6. С. 123-126.
18. Киреев А.В., Федоренко И.В., Фокин Г.А. Оценка точности позиционирования объекта с помощью границы Крамера-Рао // Труды учебных заведений связи. 2017. Т. 3, № 2. С. 77–83.
19. Перов А.И., Харисов В.Н. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования. – М.: Радиотехника, 2010. – 800 с.
20. Телеганов Н.А., Тетерин Г.Н. Метод и системы координат в геодезии. – Новосибирск: Сибирская государственная геодезическая академия, 2008.– 143 с.
21. Гнездовский Ю.Ю. Горбузов В.Н., Павлючик П.Б. Уравнения и неравенства с радикалами. – Гродно: Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, 2007. - 246 с.
22. Балыко И.А., Левашов С.В., Холодов Д.В. Решение системы линейных уравнений с избыточным числом уравнений // Материалы Международной научно-технической конференции «INTERMATIC – 2012» (Москва, 3 – 7 декабря 2012). – М.: МГТУ МИРЭА, 2012. С. 136-138.
23. Кузьмин С.З. Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации. – М.: Советское радио, 1974. – 432 с.
24. Лазарев В.О., Фокин Г.А. Оценка точности позиционирования источника радиоизлучения разностно-дальномерным и угломерным методами. Часть 1 //

Труды учебных заведений связи. 2019. Т. 5, No 2. С. 88–100. DOI: [10.31854/1813-324X-2019-5-2-88-100](https://doi.org/10.31854/1813-324X-2019-5-2-88-100)

References

1. ICD-LOC-100A. *Locata Net Positioning Control Document 2011*. Locata Corp Pty Ltd, September 2011. URL: www.locatacorp.com
2. Mohinder S. Grewal, Lawrence R. Weill, Angus P. Andrews. *Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration*, Copyright 2007. John Wiley & Sons, Inc. DOI: [10.1002/9780470099728.ch3](https://doi.org/10.1002/9780470099728.ch3)
3. Pogosyan M.A., Vereikin A.A. Automatic landing systems of aerial vehicles: analytical review. Information support. *Trudy MAI*. 2020. No. 113. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118156>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-11](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-11)
4. Dmitriev A.O., Moskatina'ev I.V., Nesterin I.M., Sysoev V.K. Options analysis of navigation systems for the Moon. *Trudy MAI*. 2021. No. 118. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=158243>. DOI: [10.34759/trd-2021-118-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-118-09)
5. Vernigora L.V., Kazmerchuk P.V., Sysoev V.K., Dmitriev A.O. Method of lunar landing stations' coordinates measurements using spacecraft optical television means. *Trudy MAI*. 2020. No. 114. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118986>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-12](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-12)
6. Bagrov A.V., Dmitriev A.O., Leonov V.A., Moskatina'ev I.V., Sysoev V.K. Two-wave optical lunar navigation system. *Trudy MAI*. 2020. No. 112. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=116356>. DOI: [10.34759/trd-2020-112-13](https://doi.org/10.34759/trd-2020-112-13)

7. Bagrov A.V., Dmitriev A.O., Leonov V.A., Mit'kin A.S., Moskatina I.V., Sysoev V.K., Shirshakov A.E. Global Lunar optical navigation system. *Trudy MAI*. 2018. No. 99. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=91814>
8. Serkin F.B., Vazhenin N.A., Veitsel' A.V. Analysis of Local Positioning System Prototype. *Trudy MAI*. 2016. No. 86. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=67824>
9. Selezneva M.S., Shen' Kai, Neusypin K.A., Proletarskii A.V. *Algoritmy obrabotki informatsii navigatsionnykh sistem i kompleksov letatel'nykh apparatov* (Algorithms for information processing of navigation systems and aircraft complexes). Moscow: Izd-vo MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2018. 238 p.
10. Chernyak V.S. *Mnogopozitsionnaya radiolokatsiya* (Multiposition radar). Moscow: Radio i svyaz' Publ., 1993. 416 p.
11. Sosnovskii A.A., Bakulev P.D. *Radionavigatsionnye sistemy* (Radionavigation systems). Moscow: Radiotekhnika Publ., 2005. 221 p.
12. Tyapkin V.N., Garin E.N. *Metody opredeleniya navigatsionnykh parametrov podvizhnykh sredstv s ispol'zovaniem sputnikovoi radionavigatsionnoi sistemy GLONASS: monografiya* (Methods for determining navigation parameters of mobile vehicles using the GLONASS satellite radio navigation system: monograph). Krasnoyarsk: Sibirskii federal'nyi universitet Publ., 2022. 260 p.
13. Torrieri D.J. *Statistical Theory of Passive Location Systems*. In: Cox I.J., Wilfong G.T. (eds) *Autonomous Robot Vehicles*. New York: Springer, 1990. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8997-2_13

14. Zekavat R., Buehrer R.M. *Handbook of Position Location: Theory, Practice and Advances*. Hoboken: John Wiley & Sons; 2019. 1281 p.
15. Kishko D.V. Analysis of accuracy estimation of own coordinates in the radio navigation systems with small bases between transmitters. *Trudy MAI*. 2014. No. 78. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53755>
16. Prokhortsov A.V., Minina O.V. Analytical solution of a navigation problem based on a pseudo-rangefinder method. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnicheskie nauki*. 2020. No. 11. P. 395-398. (In Russ.)
17. Prokhortsov A.V., Minina O.V. Analytical solution of the navigation problem based on the difference-range method. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnicheskie nauki*. 2020. No. 6. P. 123-126. (In Russ.)
18. Kireev A.V., Fedorenko I.V., Fokin G.A. Accuracy Evaluation of Positioning by Cramer-RaoBound. *Trudy uchebnykh zavedenii svyazi*. 2017. Vol. 3, No. 2. P. 77-83. (In Russ.)
19. Perov A.I., Kharisov V.N. *GLONASS. Printsipy postroeniya i funktsionirovaniya* (GLONASS. Principles of construction and functioning). Moscow.: Radiotekhnika Publ., 2010. 800 p.
20. Teleganov N.A., Teterin G.N. *Metod i sistemy koordinat v geodezii* (Method of geodetic coordinate system in the year: textbook). Novosibirsk: Sibirskaya gosudarstvennaya geodezicheskaya akademiya Publ., 2008. 143 p.

21. Gnezdovskii Yu.Yu. Gorbuzov V.N., Pavlyuchik P.B. *Uravneniya i neravenstva s radikalami* (Equations and inequalities with radicals: a manual). Grodno: Grodnenskii gosudarstvennyi universitet imeni Yanki Kupaly Publ., 2007. 246 p.
22. Balyko I.A., Levashov S.V., Kholodov D.V. Solving a system of linear equations with an excessive number of equations. *Materialy Mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii «INTERMATIC – 2012»*. Moscow: MGTU MIREA Publ., 2012. P. 136-138.
23. Kuz'min S.Z. *Osnovy teorii tsifrovoi obrabotki radiolokatsionnoi informatsii* (Fundamentals of the theory of digital processing of radar information). Moscow: Sovetskoe radio Publ., 1974. 432 p.
24. Lazarev V.O., Fokin G.A. Evaluation of the accuracy of positioning a radio source using difference-range and angle-measuring methods. Part 1. *Trudy uchebnykh zavedenii svyazi*. 2019. Vol. 5, No 2. P. 88–100. DOI: [10.31854/1813-324X-2019-5-2-88-100](https://doi.org/10.31854/1813-324X-2019-5-2-88-100)

Статья поступила в редакцию 11.04.2025

Одобрена после рецензирования 20.04.2025

Принята к публикации 25.08.2025

The article was submitted on 11.04.2025; approved after reviewing on 20.04.2025; accepted for publication on 25.08.2025