

УДК 629.7.054

Марковская модель плотности атмосферы марса

О.М.Данченко

Аннотация

Модель динамики спуска космического аппарата в возмущенной атмосфере Марса можно представить в виде многомерного марковского процесса [1,2]. При этом необходимо записать стохастические дифференциальные уравнения для возмущений, т.е. уравнения формирующих фильтров. Под возмущениями будем понимать случайные вариации плотности атмосферы, связанные в основном, с действием пылевых бурь на планете. Рассматривается задача построения нестационарного формирующего фильтра 1-ого порядка для вариаций плотности атмосферы при неполной статистической информации.

Ключевые слова: космический аппарат; Марс; возмущенная атмосфера; пылевая буря; формирующий фильтр.

Постановка задачи.

Результаты исследования атмосферы Марса автоматическими космическими аппаратами (КА) показали, что при управлении спуском КА на поверхность планеты, возникает необходимость учета влияния флуктуаций термодинамических параметров атмосферы (таких как плотность и ветер), являющихся случайными функциями пространства и времени.

Во время действия сильных и долговременных пылевых бурь со скоростями ветра более 30-40 м/сек, значительно меняется плотность атмосферы из-за наличия пылевых включений. Частицы пыли могут подниматься до высот 30-40 км и находиться в атмосфере до 2-х лет [3,4,5,6,7]. Большие пылевые бури были зафиксированы в 1922г., 1956г., 1971-72г.г., 1987г., 2001г. Из-за пылевой бури 25.07. 2007г. Солнце почти

перестало освещать солнечные батареи марсоходов Spirit и Opportunity. В 2008 году зонд «Феникс» сфотографировал пылевую бурю [8]. Основными факторами, приводящими к возникновению пылевых бурь, является разница между дневными и ночными температурами (от 240°K до 180°K), а также сильные ветровые воздействия (свыше 30 м/сек).

Исследование динамики движения спускаемого аппарата в возмущенной атмосфере может базироваться на методах статистического анализа и синтеза динамических стохастических систем, разработанных на основе общей теории случайных функций [1]. Успешное решение задач оптимизации управления движением во многом зависит от полноты информации о свойствах атмосферы и формах представления этой информации.

Процесс спуска КА в возмущенной атмосфере Марса можно представить в виде многомерного марковского процесса [1,2]. При этом необходимо записать стохастические дифференциальные уравнения для возмущений – уравнения формирующих фильтров. Под возмущениями в данной работе будем понимать случайные вариации плотности атмосферы планеты. Ограничим свою задачу построением линейного нестационарного формирующего фильтра 1-ого порядка. Мы понимаем здесь, что существует однозначная связь между высотой и временем, т.е. высота изменяется монотонно.

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \mathbf{A}_1(t) \cdot \mathbf{X} = \xi; \quad t \in [t_0, T] \quad (1)$$

где $\mathbf{A}_1(t)$ - коэффициент сноса, заданный из условия совпадения дисперсий случайного процесса на выходе формирующего фильтра с дисперсией исходного процесса на интервале $[t_0, T]$.

$$\mathbf{A}_1(t) = -\frac{d\mathbf{D}}{2\mathbf{D}} + \alpha_1 \quad (2)$$

\mathbf{D} – дисперсия исходного случайного процесса, $\mathbf{D}(t) = \mathbf{K}(t,t)$, где $\mathbf{K}(t_1, t_2)$ – корреляционная функция исходного процесса, модель которого еще будет уточняться, принимаемая в качестве исходного приближения в виде:

$$\mathbf{K}(t_1, t_2) = \mathbf{D}(t_1) e^{-\alpha(t_1 - t_2)} \quad (3)$$

α_1 - множитель, характеризующий степень затухания корреляционной функции $\mathbf{K}(t_1, t_2)$.

Задавая $A_1(t)$ и N_1 в виде (2) и (3), можно получить совпадение дисперсий при любом множителе α_1 , можно, даже задаваясь фильтром 1-ого порядка получить более или менее удовлетворительное совпадение корреляционной функции процесса (1) с корреляционной функцией исходного процесса.

Построение модели плотности атмосферы.

Плотность атмосферы Марса на одной и той же высоте может иметь значения, отличающиеся между собой в 3-4 раза [5-9]. Осредненные данные по плотности атмосферы с пылевыми включениями приведены в таблице 1.

Плотность атмосферы с пылевыми включениями.

Таблица 1

Н [км]	1-2	20	30	40 - 60
г [мк] радиус частиц	50 – 100	10 – 30	2 - 4	0,2 – 1
$\Delta\rho$ [г/см ³] пыли	$2,041 \cdot 10^{-4}$	$8,164 \cdot 10^{-6}$	$5,225 \cdot 10^{-7}$	$6,53 \cdot 10^{-11}$
ρ_{Σ} [г/см ³] с учетом пыли	$21,549 \cdot 10^{-5}$	$10,364 \cdot 10^{-6}$	$10,42 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-7} - 5,565 \cdot 10^{-9}$

Как уже указывалось выше, мы будем рассматривать случайные вариации плотности атмосферы от некоторого принятого стандартного закона, как внешние возмущения. В качестве стандартного закона распределения плотности атмосферы по высоте, чаще всего применяют так называемую «рабочую» модель, схожую с минимальной моделью атмосферы Марса В.И.Мороза [10] и моделью VM-7 [5,6].

Предполагают экспоненциальную зависимость плотности ρ от высоты H над поверхностью планеты:

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-\beta H}, \text{ где } \rho_0 = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^3, \beta = 0,09 \text{ 1/км}$$

Параметры предельных моделей имеют следующие значения:

$$\rho_0 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^3, \beta = 0,11 \text{ 1/км} - \text{ для «минимальной» модели,}$$

$$\rho_0 = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^3, \beta = 0,07 \text{ 1/км} - \text{ для «максимальной» модели.}$$

Предполагая однозначную связь между временем и высотой, будем строить модель распределения плотности атмосферы Марса по высоте при неполной статистической информации относительно вариаций плотности атмосферы. Основным статистический

материал был взят из отчетов о полетах аппаратов «Марс – 2,3,6», «Маринер-9» и частично «Викинг – 1,2» и АМС «Фобос – 2» [3;5-9].

Принималось, что пыль состоит из кварцевого песка с удельной плотностью 2,6 г/см³, средняя плотность распределения пылевых частиц в атмосфере 10³ 1/см³; на высоту $H = 0-40$ км возможно поднять частицы радиусом до 100мк (таблица 1). Считая распределение частиц пыли равномерным, можно подсчитать приблизительную плотность атмосферы в столбе пыли. На основе экспериментальных данных о запыленной атмосфере, опишем зависимость граничной плотности (с пылевыми включениями) от высоты:

$$\rho(H) = a_0 H^n + a_1 H^{n-1} + \dots + a_{n-1} H + a_n \quad (4)$$

Как показали расчеты при $n=4$, ошибка аппроксимации ϵ меньше 3%. Из рис.1 видно, что значения плотности, вычисленные при $n=4$, мало отличаются от экспериментальных данных.

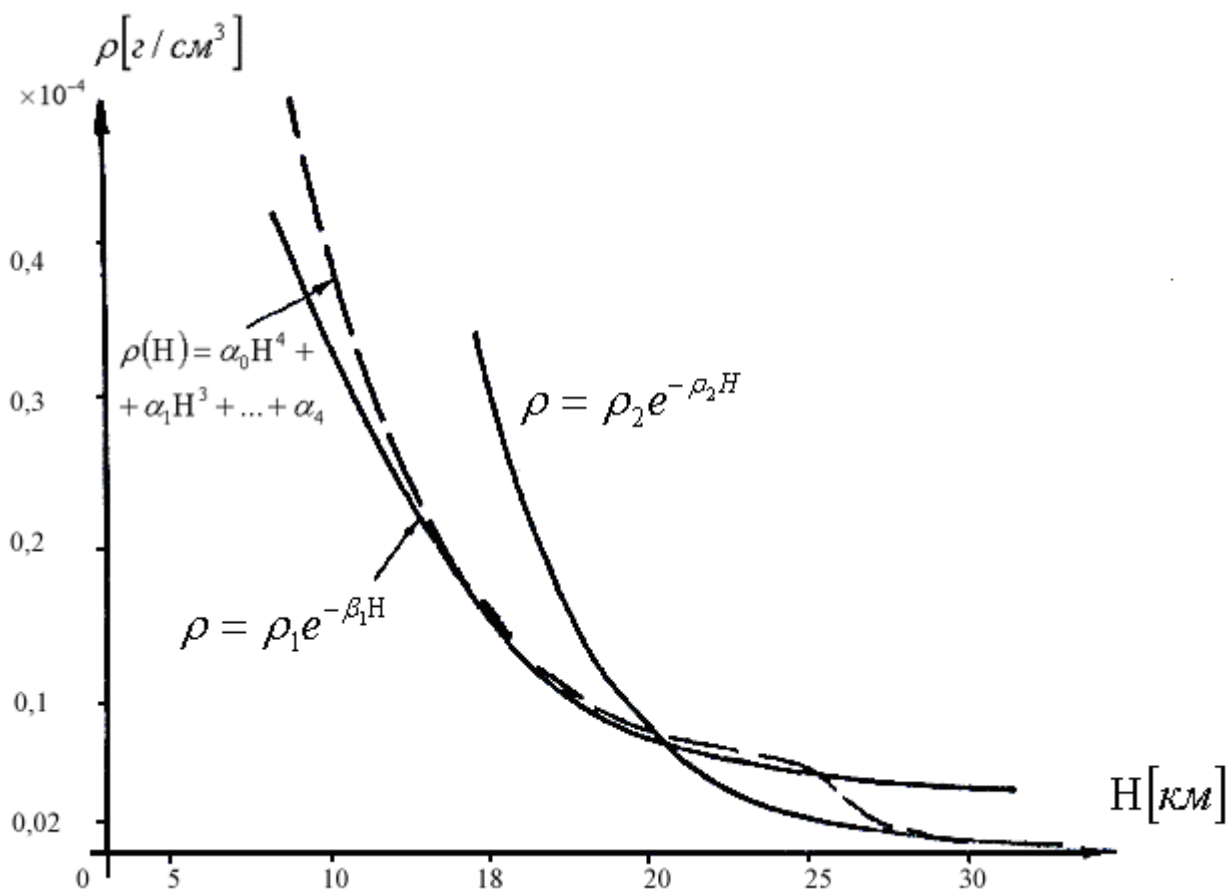


Рис.1 Модель плотности атмосферы при наличии пыли.

Однако полином четвертой степени, хоть и не является громоздким выражением, все же для дальнейших вычислений будет представлять определенные трудности. Оказалось, что достаточно заменить экспериментальную кривую двумя экспонентами вида:

$\rho(H) = \rho_0 \cdot e^{-\beta H}$, где при изменении высоты H от 0 до 20 км

$$\rho'_{02} = 0,261545 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3, \quad \beta'_2 = 0,16141 \text{ 1/км},$$

$$\rho''_{02} = 0,001024316 \text{ г/см}^3, \quad \beta''_2 = 0,2296715 \text{ 1/км}.$$

При высоте $H > 40$ км, пылевые включения настолько незначительны, что практически не влияют на величину плотности. Поэтому примем при $H > 40$ км, $\rho(H) = \rho_{\text{станн}}(H)$. Для дальнейших вычислений перейдем к относительным отклонениям:

$$\Delta \bar{\rho} = \frac{\Delta \rho(H)}{\rho_{\text{станд}}(H)} = \frac{\rho(H) - \rho_{\text{ст}}(H)}{\rho_{\text{ст}}(H)} = \frac{\rho(H)}{\rho_{\text{ст}}(H)} - 1 = \frac{\rho_{02}}{\rho_0} e^{-(\beta_2 - \beta)H} \quad (5)$$

Где на высоте $H=0$ значение плотности, показателя экспоненты и относительного отклонения с индексом «2» соответствуют верхней границе, а с индексом «1» - для нижней границы. Определим нижнюю предельную границу изменения $\Delta \bar{\rho}(H)$, соответствующую безпылевой обстановке. Из экспериментальных данных [5 - 9] поверхностное давление меняется от 2,9 мб до 8,3 мб (при стандартном – 5,5 мб). Плотность газа, составляющего атмосферу, связана с давлением и температурой уравнением состояния идеального газа:

$$\frac{P_0}{\rho_0} = g_0 R T_0, \quad (6)$$

где g_0 – ускорение силы тяжести на поверхности, R – газовая постоянная, причем $g_0 R = \text{const}$, т.е. $\rho_0 = \text{const} \cdot f(p_0, T_0)$ (7)

Тогда получим нижнее значение относительного отклонения плотности атмосферы

$$\Delta \bar{\rho}_1 = \frac{\rho_{01} - \rho_0}{\rho_0} = -0,344 \quad (8)$$

На рис.2 представлены границы области, внутри которой находятся всевозможные относительные отклонения плотности.

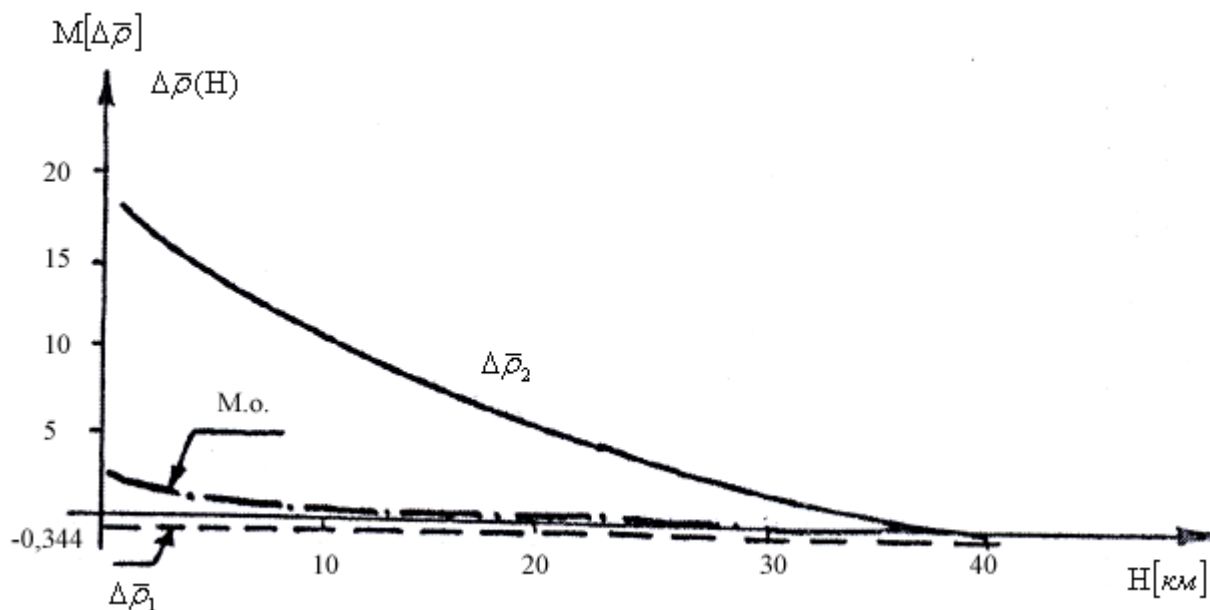


Рис.2 Границы относительных отклонений плотности.

При $H > 35$ км можно с большой достоверностью утверждать, что все отклонения плотности войдут в указанные на рис.2 границы. Вероятнее всего нижняя граница будет также претерпевать изменения и стремиться к оси H . Но для простоты вычислений считаем, что $\Delta\bar{\rho}_1 = \text{const}$. Далее будет показано, что это упрощение может быть оправдано.

Для того чтобы построить формирующий фильтр для возмущений плотности атмосферы одних экспериментальных данных [3,5-9] было недостаточно, и пришлось вводить гипотетический закон изменения функции распределения [10]. Считаем, что статистически заданы не только границы области существования случайной величины относительных отклонений плотности, но также можно считать распределение вероятностей следующим:

$$F(\Delta\bar{\rho}) = \begin{cases} 0, & \text{при } \Delta\bar{\rho} < \Delta\bar{\rho}_1 \\ 1 - e^{-c(d+\Delta\bar{\rho})}, & \text{при } \Delta\bar{\rho}_1(H) \leq \Delta\bar{\rho} \leq \Delta\bar{\rho}_2(H) \\ 1, & \text{при } \Delta\bar{\rho} > \Delta\bar{\rho}_2(H) \end{cases} \quad (9)$$

Физически условия (9) будут означать, что вероятность события, что $\Delta\bar{\rho}$ примет внутри некоторого сечения $H=H_i$ значения меньше $\Delta\bar{\rho}_1$, равно нулю, т.е. вероятность выхода случайной величины $\Delta\bar{\rho}$ за нижнюю границу – ноль. Внутри области возможных значений $[\Delta\bar{\rho}_1, \Delta\bar{\rho}_2]$ вероятность случайного события принятия $\rho(H) = \rho_{ст}(H)$ равна приблизительно 0,5. Т.е. наличие либо отсутствие пыли в атмосфере, - события почти равновероятные, хотя в некоторых источниках [7] вероятность появления пылевых включений 0,6-0,75. Вероятность попадания в очаг пылевой бури достаточно мала (т.е.

$\Delta\bar{p} = \Delta\rho_2$). Такое предположение принималось из того условия, что отношение площади очага бури к площади всей планеты мало [5]. Найдем значения коэффициентов **c** и **d** в законе (9).

$$F(\Delta\bar{p}_1) = 0, \text{ т.е. } 1 - e^{-c(d+\Delta\bar{p}_1)} = 0$$

$$F(\Delta\bar{p}_2) = 0,9999, \text{ т.е. } 1 - e^{-c(d+\Delta\bar{p}_2)} = 0,9999$$

Тогда параметр $c = \frac{6,9078}{0,344 + \Delta\bar{p}_2(\text{H})}$ и $d = -\Delta\bar{p}_1$, но $\Delta\bar{p}_2$ изменяется с изменением высоты

$$\text{H, т.е. } \Delta\bar{p}_2 = \frac{P_{02}}{P_0} e^{-(\beta_2 - \beta)\text{H}}, \text{ следовательно,}$$

$$F(\Delta\bar{p}, \text{H}) = 1 - e^{-\frac{6,9078(0,344 + \Delta\bar{p})}{0,344 + \Delta\bar{p}_2(\text{H})}} \quad (10)$$

Продифференцировав функцию распределения (10) по $\Delta\bar{p}$, найдем одномерный закон плотности распределения случайной величины внутри каждого сечения.

$$f(\Delta\bar{p})_{\text{H}=\text{H}_i} = \frac{6,9078}{[0,344 + \Delta\bar{p}_2(\text{H}_i)]} \cdot e^{-\frac{6,9078(0,344 + \Delta\bar{p})}{0,344 + \Delta\bar{p}_2(\text{H}_i)}} \quad (11)$$

при $\Delta\bar{p}_1 \leq \Delta\bar{p} \leq \Delta\bar{p}_2$

Тогда можем найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение [10]. На рис.2 представлена зависимость математического ожидания случайных отклонений плотности атмосферы от стандартного закона, как функции высоты H.

Определение коэффициентов формирующего фильтра.

Определив дисперсию, можно перейти к нахождению коэффициентов линейного нестационарного формирующего фильтра. Как уже отмечалось, задав порядок формирующего фильтра равный единице, мы требуем совпадения дисперсий исходного процесса и процесса на выходе фильтра. Но внутренняя структура случайного процесса описывается не его дисперсией, а его корреляционной функцией, т.е. для обоснованного выбора коэффициента **а1** необходимо построить множество сечений корреляционной функции.

Сечения корреляционной функции были построены путем введения дополнительного предположения. Считая плотность атмосферы непрерывной функцией высоты, меняющейся без сильных скачков, было сделано предположение, что значения плотности в каждом сечении по высоте связаны нормальным законом [1,10].

Реальное движение объекта в атмосфере планеты происходит при убывании высоты. Учитывая однозначную связь между временем и высотой, запишем уравнение формирующего фильтра в обратной высоте

$\tau = H_{\text{вход}} - H_{\text{текущ}}$, а именно:

$$\frac{d\Delta\bar{\rho}}{d\tau} = -A_1\Delta\bar{\rho} + \xi, \text{ тогда} \quad (12)$$

$$A_1 = -\frac{dD}{2D} + \alpha_1 \quad \text{и} \quad N_1 = 2\alpha_1 \cdot D \quad (13)$$

Следует отметить, что корреляционная функция полученного на выходе фильтра (12) случайного процесса должна будет совпадать с полученной выше именно при убывании высоты. На этот факт следует обращать внимание, т.к. корреляционные функции прямого и обратного процессов в общем случае не совпадают. Множитель α_1 характеризует степень затухания корреляционной функции $K(H_1, H_2)$ при возрастании разности $\Delta H = |H_1 - H_2|$. Дисперсия процесса (12) совпадает с полученной дисперсией $D(H)$ для всех высот. Составляя на основе (12) уравнение для дисперсий

$$\frac{dD}{d\tau} = -2A_1D + N_1 \quad (14)$$

убеждаемся, что при выполнении (13) оно обращается в тождество. Учитывая, что $\tau = H_{\text{вход}} - H_{\text{текущ}}$, выражение для коэффициента A_1 запишем следующим образом:

$$A_1 = -\frac{dD}{2D} + \alpha_1 \quad (15)$$

где производную $\left(\frac{dD}{dH}\right)$ получим с помощью метода безразностного дифференцирования.

Значения $\left(\frac{dD}{dH}\right)$ и коэффициента A_1 представлены в таблице 2.

Таблица 2

Коэффициент сноса A_1 , интенсивности «белого шума» для $H=1-27$ км

H [км]	1	2	3	5	7	9	11
$\frac{dD}{dH}$	-0,6004	-0,5475	-0,4988	-0,4131	-0,3410	-0,2808	-0,2306
A_1	0,0487	0,484	0,0481	0,0474	0,0468	0,04625	0,0457
N_1	1,195	1,081	0,977	0,805	0,653	0,531	0,431

H[км]	13	15	17	19	25	26	27
$\frac{dD}{dH}$	-0,1843	-0,1545	-0,1257	-0,0878	-0,0605	-0,0479	-0,0365
A ₁	0,0454	0,0445	0,0439	0,0418	-0,0413	-0,0494	-0,054
N ₁	0,349	0,282	0,227	0,183	0,0425	0,0318	0,0236

Множитель α_1 принимаем равным 0,098 1/м для высот $H < 32$ км, что соответствует среднему затуханию корреляционной функции $K(H_1, H_2)$ при возрастании разности $\Delta H = |H_1 - H_2|$. Для высот $H > 32$ км принимаем $\alpha_1 = 0$, т.к. считаем, что на этих высотах интенсивность «белого шума» N_1 равна нулю, т.е. плотность атмосферы совпадает со стандартной и корреляционная функция постоянна. На рис.3 представлены две реализации случайных значений плотности атмосферы на трассе спуска КА с учетом возможных пылевых включений.

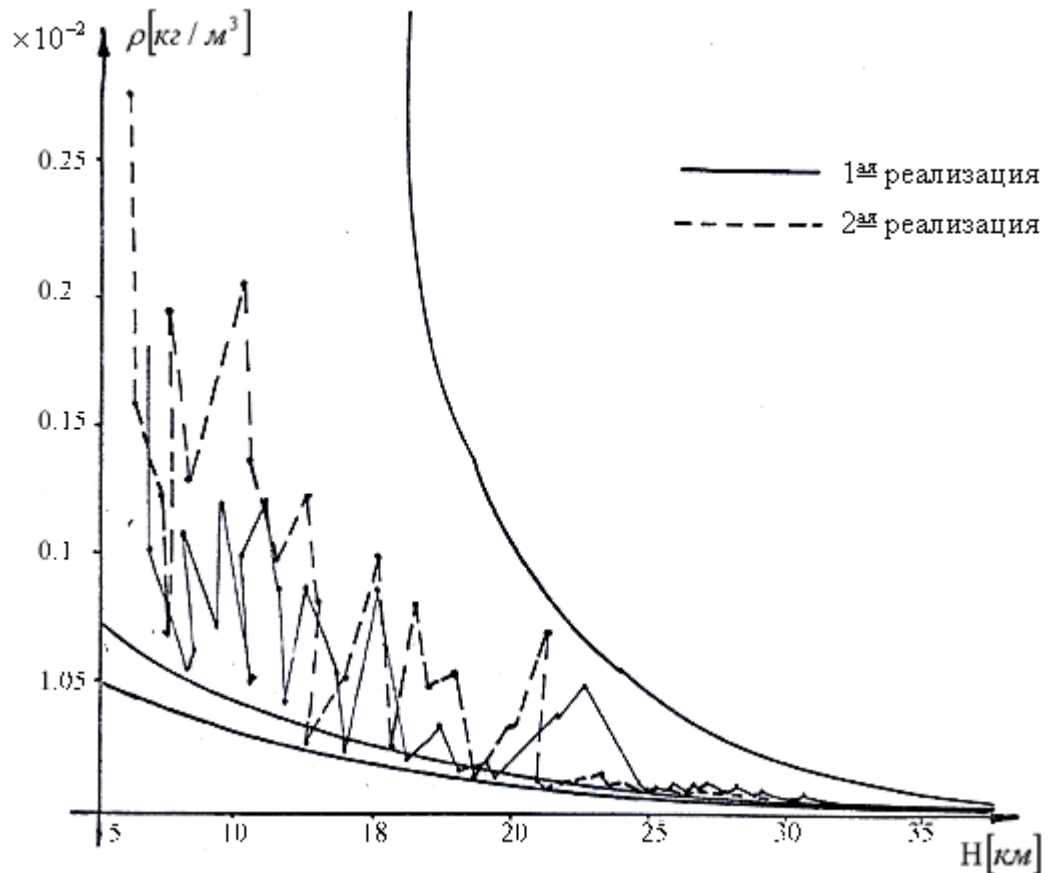


Рис.3 Случайные значения плотности атмосферы на трассе спуска.

Построенная модель вариаций плотности атмосферы в дальнейшем использовалась для анализа динамики спуска КА в запыленной атмосфере и выработки стратегии управления спускаемым аппаратом.

Библиографический список.

1. Батков А.М., Александров В.М. и др. Методы оптимизации в статистических задачах управления М., «Машиностроение», 1974г., 196с.
2. Лебедев А.А., Бобронников В.Т., Красильщиков М.Н., Малышев В.В. Статистическая динамика управляемого полета. М., «Машиностроение», 1978г.
3. Авдучевский В.С., Аким Э.Л., Алешин В.И. и др. Атмосфера Марса в районе посадки спускаемого аппарата «Марс-6» (предварительные результаты). «Космические исследования», т.ХШ, вып.1, изд. «Наука», 1975г., 31 стр.
4. Вокулер Ж.. Физика планеты Марс. М., «Наука», 1965г.
5. Gierasch P.J. and Goody R.M. A model of Martian Great Dust storm. Journal of the atmospheric science, march 1973., Vo. 30, №2, pp. 169-179.
6. Gierasch P.J. and Goody R.M. A study of the thermal and dynamical structure of the Martian lower atmosphere. Planet Space, Sie., 1968, Vo. 16, pp. 615-646, Pergamon Press.
7. Mariner-9 S-Band Martian Occultation Experiment. Initial Results of the atmosphere and Topography of Mars. Science, 1972, pp. 315-317.
8. NASA's Phoenix Lander Sees, Feels Martian Whirlwinds in Action – сайт миссии «Феникс», 11.09.2008.
9. Leovy C. and Y. Minis. Numerical Simulation of the Atmospheric Circulation and Climate of Mars. Journal of the atmospheric Science, Nov. 1969, Vo. 26, №6.
10. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Изд. 2-е. М., «Наука», 1973г., 312-351с., 406-414с.
11. Мороз В.И. Физика планеты Марс. М., 1978г.
12. Маров М.Я. Планеты Солнечной системы. М., «Наука», 1986г., 320 стр.

Сведения об авторах.

Данченко Оксана Михайловна, к.т.н., доцент каф.805 «Математическая кибернетика», тел. +7 499-158-48-11, E-mail; dep.805 @ mai.ru

