Труды МАИ. 2025. № 142
Trudy MAI. 2025. No. 142. (In Russ.)

Научная статья
УДК 539.377.5
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=185099
EDN: https://www.elibrary.ru/HUNGID

ТЕОРИЯ СТЕРЖНЕЙ (ПЛАСТИН), ПОСТРОЕННАЯ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

Мария Сергеевна Егорова[1]✉, Максим Юрьевич Калягин[2], Лев Наумович Рабинский[3]

[1,2,3]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия
[1]egorovams@mai.ru✉

Аннотация. В статье представлена математическая постановка для обобщённой модели градиентной пористой среды. В качестве прикладных моделей рассмотрены вариационные формулировки традиционной «некорректной» и вариационной «корректной» теории цилиндрического изгиба пористых пластин. (стержней) «Некорректная» теория отличается от «корректной» тем, что в ней классическая цилиндрическая жесткость получает поправку за счет градиентных жесткостей, в то время как в корректной постановке обобщенной теории пористой среды такого эффекта нет. Так же предложена оригинальная прикладная модель, относящаяся к классу моделей Тимошенко.

Разработка точных моделей деформирования тонкостенных конструкций критична для аэрокосмической техники, микроэлектроники и биомеханики, где масштабные эффекты, обусловленные микроструктурой материалов, существенно влияют на механические свойства.

Предложена обобщенная градиентная модель пористой среды, объединяющая подходы Миндлина и Тупина. Учтено взаимодействие градиентов совместных и несовместных деформаций, а также введена алгебраическая пористость.

Получены уравнения равновесия и граничные условия для обобщенной модели, охватывающей классическую теорию упругости, среды с алгебраической пористостью и градиентные теории как частные случаи.

Разработаны корректные вариационные постановки для цилиндрического изгиба пластин, исключающие сингулярности при малых толщинах.

Показано, что традиционные «некорректные» модели искажают изгибную жесткость за счет градиентных поправок, тогда как предложенная модель сохраняет физическую адекватность.

Новая модель устраняет недостатки аналогов, обеспечивая точное описание масштабных эффектов. Результаты применимы для проектирования микроструктурированных элементов в авиационных и космических системах.

Ключевые слова: градиентные модели, пористая среда, вариационные формулировки, масштабные эффекты, модели Миндлина и Тупина, цилиндрический изгиб, корректные и некорректные теории, дефекты-поры, алгебраическая пористость

Финансирование: работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и образования Российской Федерации (FSFF-2025-0001)

Для цитирования: Егорова М.С., Калягин М.Ю., Рабинский Л.Н. Теория стержней (пластин), построенная для неклассических моделей пористой среды механики деформируемого тела // Труды МАИ. 2025. № 142. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=185099

Original article

THEORY OF RODS (PLATES) CONSTRUCTED FOR NON-CLASSICAL MODELS OF A POROUS MEDIUM IN DEFORMABLE BODY MECHANICS

Mariya S. Egorova[1]✉, Maksim Yu. Kalyagin[2], Lev N. Rabinskiy[3]
[1,2,3]Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
[1]egorovams@mai.ru✉

Abstract. The article presents a mathematical formulation for a generalized model of a gradient porous medium. Variational formulations of the traditional "incorrect" and variational "correct" theory of cylindrical bending of porous plates are considered as applied models. The "incorrect" theory differs from the "correct" one in that in it the classical cylindrical stiffness is corrected due to gradient stiffness, while in the correct formulation of the generalized theory of a porous medium there is no such effect. An original applied model belonging to the class of Timoshenko models is also proposed.

The development of accurate deformation models for thin-walled structures is critical in aerospace engineering, microelectronics, and biomechanics, where scale effects caused by material microstructure significantly affect mechanical properties.

A generalized gradient model of a porous medium is proposed, combining Mindlin's and Toupin's approaches. It accounts for gradients of compatible/incompatible deformations and introduces algebraic porosity.

Equilibrium equations and boundary conditions for the generalized model are derived, covering classical elasticity, algebraic porosity, and gradient theories as special cases.

Correct variational formulations for cylindrical bending of plates are developed, eliminating singularities at small thicknesses.

Traditional "incorrect" models distort bending stiffness via gradient terms, while the proposed formulation preserves physical adequacy.

The model overcomes limitations of analogs, ensuring precise description of scale effects.

Results are applicable to microstructured components in aerospace systems.

Keywords: gradient models, porous medium, variational formulations, scale effects, Mindlin and Toupin models, cylindrical bending, correct and incorrect theories, pore defects, algebraic porosity

Funding: the work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Education of the Russian Federation (FSFF-2025-0001)

For citation: Egorova M.S., Kalyagin M.Yu., Rabinskiy L.N. Theory of rods (plates) constructed for non-classical models of a porous medium in deformable body mechanics. *Trudy MAI*. 2025. No. 142. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=185099

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается проблема формулировки прикладных вариантов моделей деформирования стержней (пластин) для неклассических пористых моделей сред.

Интерес к моделированию деформации тонких структур связан с задачами проектирования высоконагруженных элементов авиационно-ракетной техники: обшивок ракетных ступеней, термозащитных панелей космических аппаратов и микромеханических сенсоров. [1-3]. В таких системах толщина элементов сопоставима с размерами микроструктуры материала, что требует учета масштабных эффектов. Классическая теория упругости не учитывает градиенты деформаций и дефекты типа пор, что приводит к завышению жесткости конструкций.

Ранее предложенные градиентные модели (Тупин, Миндлин) ограничены узкими классами задач. В данной работе представлена обобщенная модель, объединяющая градиентные и дефектные свойства, а также ее прикладные формулировки для изгиба пластин. Результаты дополнены сравнением с современными аналогами и примерами применения в аэрокосмическая инженерии.

В настоящее время существует значительное число публикаций, посвященных анализу деформаций стержней с учетом масштабных эффектов с использованием прикладных градиентных теорий упругости. [19-20]. Отметим здесь некоторые недавние интересные работы в этой области [4–9], в которых использованы градиентные модели первого порядка. Отметим, что в этих работах теории стержней строились путем прямого применения кинематики теории стержней Бернулли или Тимошенко для формулировки физических соотношений в усилиях и моментах и для получения уравнений равновесия путем использования вариационного подхода без анализа всего спектра краевых условий на продольных поверхностях стержня. Т.е. фактически в этих работах отсутствует анализ соответствия между классической кинематикой теории стержней и обобщенной теории упругости с расширенным спектром силовых взаимодействий. [10-12].

В статье дается анализ вариационных моделей градиентных дилатационных моделей с полями дефектов- порами.

Текст статьи содержит фактически две части. В первой обсуждается кратко вариационная модель пористых сред. Построены как бездефектные градиентные модели, так и модели сред содержащими поля дефектов-поры. Формулировка модели дается в перемещениях, используется вариационный принцип Лагранжа. Градиентные модели сред и модели сред с полями дефектов относятся к моделям, которые учитывают масштабные эффекты.

Вторая часть связана с формулировкой прикладных моделей стержней (пластин) основанная на введении кинематических гипотез и использованию вариационного подхода сведения двумерной задачи к одномерной. Целью этой части исследования является получение корректных математических постановок теории стержней и пластин, которые корректно учитывали масштабные эффекты.

Дается вариационная модель обобщенный среды построенная на основании Лагранжа которая включается в себя и градиентность с порами и учитывает эволюцию полей дефектов в рамках частной модели Миндлина. И градиентности, и дефектности соответствуют свои масштабные параметры. Дается сравнительная оценка математических постановок вариационных моделей, включающая кинематические соотношения, определяющие соотношения, уравнения равновесия и альтернативные пары граничных условий. На основе полученных вариационных моделей рассматривается два варианта прикладных теории изгиба стержней. Первый основан на стандартном использовании вариационного подхода с применением кинематических соотношений типа Бернулли (для стержней) или Кирхгофа-Лява для пластин, подстановка кинематических переменных интегрирования по толщине приводят к системе уравнений теории стрежней, учитывающих масштабные параметры. Показано что такой подход модифицирует классическую изгибную жёсткость за счет масштабного параметра что является не совсем корректным. В связи с этим предлагается другой вариант модели, который оказывается свободным о некорректности стандартного подхода.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Рассматривается линейная изотропная среда, в качестве кинематических переменных выступает вектор перемещения, тензор девиатора деформаций γ_{ij} дилатация (шаровой тензор деформаций) θ, скалярный параметр φ, который является по сути шаровым тензором свободных дисторсий d_{ij} , использующимся при построении кинетических моделей Миндлина с полями дефектов.

В данном случае неявно используется упрощенный вариант теории Миндлина, когда свободная деформация связана только шаровым тензором. $d_{ij} = \varphi\delta_{ij}$. Запишем выражение для Лагранжиана L, работы внешних сил A,U потенциальная энергия и плотность потенциальной энергии U_V для обобщенной модели дефектной-пористой и градиентной среды:

$$
\begin{aligned}
&L = A - U \\
&A = \int\limits_V P_i^V R_i dV + \int\limits_F P_i^F R_i dF \\
&U = \int\limits_V U_V dV \\
&U_V = \frac{1}{2}[2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + (K^{11}\theta\theta + 2K^{12}\theta\varphi + K^{22}\varphi\varphi) + (C^{11}\theta_{,k}\theta_{,k} + 2C^{12}\theta_{,k}\varphi_{,k} + C^{22}\varphi_{,k}\varphi_{,k})]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где ($\theta_{,k}\varphi_{,k}$) обозначает частную производную по координате x_k

Коэффициенты K^{11}, K^{22} отвечают в (1) за наличие дефектов($\varphi \neq 0$) А коэффициенты C_{ij} отвечают за «градиентность» C^{11}, и эволюцию пор , коэффициент C^{12} отвечает за связанность градиентных упругих дилатационных эффектов и полей дефектов-пор , P_i^V P_i^F - плотности объемных и поверхностных сил.

Особенность вариационной постановки в том, что она учитывает градиентную дилатацию и дефектную модель среды, связанную с наличием неинтегрируемых полей дефектов пор (φ)

Преобразование квадратичной формы в (1) к каноническому виду:

$$
\begin{aligned}
&(K^{11}\theta\theta + 2K^{12}\theta\varphi + K^{22}\varphi\varphi) = (K^{11} - \frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}})\theta\theta + K^{22}(\varphi + \frac{K^{12}}{K^{22}}\theta)(\varphi + \frac{K^{12}}{K^{22}}\theta) \\
&(C^{11}\theta_{,k}\theta_{,k} + 2C^{12}\theta_{,k}\varphi_{,k} + C^{22}\varphi_{,k}\varphi_{,k}) = (C^{11} - \frac{C^{12}C^{12}}{C^{22}})\theta_{,k}\theta_{,k} + C^{22}(\varphi_{,k} + \frac{C^{12}}{C^{22}}\theta_{,k})(\varphi_{,k} + \frac{C^{12}}{C^{22}}\theta_{,k})
\end{aligned}
$$

Построим определяющие соотношения с использованием формул Грина, что эквивалентно утверждению об обратимости рассматриваемых процессов деформирования. Силовые факторы, находятся как следствие формул Грина записанные для плотности потенциальной энергии (1). Напряжения Коши определяются следующим образом σ_{ij}:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = \mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda\theta + K^{12}\varphi)\delta_{ij} \tag{2}$$

Остальные силовые факторы имеют вид

$$\begin{gathered}
\tau_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial \gamma_{ij}} = 2\mu\gamma_{ij} \\
\begin{cases} \sigma^{\theta} = \dfrac{\partial U_V}{\partial \theta} = K^{11}\theta + K^{12}\varphi \\ \sigma^{\varphi} = \dfrac{\partial U_V}{\partial \varphi} = K^{12}\theta + K^{22}\varphi \end{cases}
\quad
\begin{cases} m_k^{\theta} = \dfrac{\partial U_V}{\partial \theta_{,k}} = C^{11}\theta_{,k} + C^{12}\varphi_{,k} \\ m_k^{\varphi} = \dfrac{\partial U_V}{\partial \varphi_{,k}} = C^{12}\theta_{,k} + C^{22}\varphi_{,k} \end{cases}
\end{gathered} \tag{3}$$

Квази-классические напряжения (total stress, в градиентных моделях) s_{ij} определяются формулой:

$$s_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial U_V}{\partial R_{i,jk}}\right) = \mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda\theta + K^{12}\varphi - C^{11}\Delta\theta - C^{12}\Delta\varphi)\delta_{ij} \tag{4}$$

Равенствами (2)-(4) определяются силовые факторы и даются определяющие соотношения

Лемма-1: «Полные напряжения σ_{ij} являются суммой классических напряжений s_{ij} и градиентной поправки к классическим напряжениям $m_{k,k}^{\theta}\delta_{ij}$».

Доказательство:

Из формул Грина (2), (3) и (4) следует:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = \left[\frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial U_V}{\partial R_{i,jk}}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial U_V}{\partial R_{i,jk}}\right) = s_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial U_V}{\partial R_{r,rk}}\right)\delta_{ij} = s_{ij} + \frac{\partial m_k^{\theta}}{\partial x_k}\delta_{ij} \tag{5}$$

Лемма доказана.

Докажем, что уравнение равновесия и статические граничные условие формулируются на квазистатические напряжения

Рассмотрим Вариационное уравнение:

$$\begin{aligned}&\delta L=\int\limits_V [(\tau_{ij,j}+\sigma^{\theta}_{,i}-m^{\theta}_{k,ki}+P^V_i)\delta R_i+(m^{\varphi}_{k,k}-\sigma^{\varphi})\delta\varphi]dV+\\&+\int\limits_F [P^F_i-(\tau_{ij}+\sigma^{\theta}\delta_{ij}-m^{\theta}_{k,k}\delta_{ij})n_j]\delta R_i-m^{\theta}_k n_k\delta\theta-m^{\varphi}_k n_k\delta\varphi]dF=0\end{aligned} \tag{6}$$

Отсюда, из (6) следуют уравнения Эйлера в силовых факторах:

$$s_{ij,j}+P^V_i=0,\ m^{\varphi}_{k,k}-\sigma^{\varphi}=0 \tag{7}$$

Уравнения Эйлера (7) в кинематических переменных записываются с учетом (2)-(4):

$$\begin{cases}\mu(R_{i,j}-R_{j,i})_{,j}+[(2\mu+\lambda)\theta+K^{12}\varphi-C^{11}\Delta\theta-C^{12}\Delta\varphi]_{,i}+P^V_i=0\\C^{12}\Delta\theta+C^{22}\Delta\varphi-K^{12}\theta-K^{22}\varphi=0\end{cases} \tag{8}$$

Граничные условия в силовых факторах также определяются из вариационного уравнения (6):

$$\int\limits_F (P^F_i-s_{ij}n_j)\delta R_i dF=0\ \int\limits_F m^{\theta}_k n_k\delta\theta dF=0\ \int\limits_F m^{\varphi}_k n_k\delta\varphi dF=0 \tag{9}$$

Граничные условия (9) в кинематических так же получены с помощью (2)-(4) и имеют вид:

$$\begin{aligned}&\int\limits_F \{P^F_i-[\mu(R_{i,j}+R_{j,i})+(\lambda R_{r,r}-C^{11}\Delta R_{r,r}+K^{12}\varphi-C^{12}\Delta\varphi)\delta_{ij}]n_j\}\delta R_i dF=0\\&\int\limits_F (C^{11}R_{r,rk}+C^{12}\varphi_{,k})n_k\delta R_{i,i}dF=0\quad\int\limits_F (C^{12}R_{r,rk}+C^{22}\varphi_{,k})n_k\delta\varphi dF=0\end{aligned} \tag{10}$$

Определение напряжений s_{ij} как классических, опирается на классический вид уравнений равновесия (7) и на классический вид статических граничных условий (9) в терминах s_{ij}

Таким образом, сформулирована обобщенная модель (8),(10) дилатационной среды Миндлина, в которой учтены градиенты как совместного, так и несовместного изменения объёма.

В следующих параграфах рассмотрены частные случаи такой среды. Частные случаи получаются из общего путем предположения о равенстве нулю соответствующих модулей.

2.1. Последовательность частных моделей. Классическая среда как частный случай

Из общей вариационной постановки моделей пористых сред (6), (8), (10) получим последовательность вариационных постановок частных моделей.

Пусть в (1) равны нулю все неклассические модули:

$$K^{12} = K^{22} = 0 \quad C^{11} = C^{12} = C^{22} = 0 \tag{11}$$

Тогда плотность потенциальной энергии приобретает вид:

$$U_V = \frac{1}{2}(2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + K^{11}\theta\theta) = \frac{1}{2}(2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\theta) \tag{12}$$

Здесь полные напряжения совпадают с классическими, так как отсутствует моментная поправка:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = \mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + \lambda R_{k,k}\delta_{ij} \tag{13}$$

Вариационное уравнение имеет вид:

$$\delta L = \int\limits_V (\sigma_{ij,j} + P_i^V)\delta R_i dV + \int\limits_F (P_i^F - \sigma_{ij}n_j)\delta R_i dF = 0 \tag{14}$$

Из (11)-(14) следуют уравнения равновесия как уравнения Эйлера и известные статические граничные условия.

2.2 Среда с «алгебраической» пористостью

Пусть в (1) равны нулю градиентные модули:

$$C^{11} = C^{12} = C^{22} = 0 \qquad (19)$$

Плотность потенциальной энергии приобретает вид:

$$U_V = \frac{1}{2}(2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\theta + 2K^{12}\theta\varphi + K^{22}\varphi\varphi) \qquad (20)$$

Полные напряжения совпадают с классическими, так как отсутствует моментная поправка:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = \mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda R_{k,k} + K^{12}\varphi)\delta_{ij} \quad \sigma^{\varphi} = \frac{\partial U_V}{\partial \varphi} = K^{12}R_{k,k} + K^{22}\varphi \qquad (21)$$

Вариационное уравнение (1)(6) преобразуется к виду

$$\delta L = \int\limits_V [(\sigma_{ij,j} + P_i^V)\delta R_i + \sigma^{\varphi}\delta\varphi]dV + \int\limits_F (P_i^F - \sigma_{ij}n_j)\delta R_i dF = 0 \qquad (22)$$

Уравнения (22) дают уравнение Эйлера в силовых факторах:

$$\left\{\sigma_{ij,j} + P_i^V = 0, \sigma^{\varphi} = 0\right. \qquad (23)$$

Уравнения Эйлера (23) перепишем в кинематических переменных, учитывая (21):

$$\mu(R_{i,j} - R_{j,i})_{,j} + (2\mu + \lambda)R_{k,ki} + K^{12}\varphi_{,i} + P_i^V = 0 \quad K^{12}R_{k,k} + K^{22}\varphi = 0 \qquad (24)$$

Естественные граничные условия в силовых факторах также следуют из (22):

$$\int\limits_F (P_i^F - \sigma_{ij}n_j)\delta R_i dF = 0 \qquad (25)$$

Граничные условия (25) легко переписываются в кинематических переменных:

$$\int_F \{P_i^F - [\mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda R_{r,r} + K^{12}\varphi)\delta_{ij}]n_j\}\delta R_i dF = 0 \qquad (26)$$

Примечательным свойством модели алгебраической пористости (19)-(26) является то, что пористость можно исключить (алгебраически выразить через совместное изменение объёма) с помощью уравнения пористости – второе уравнение системы (24):

$$\varphi = -\frac{K^{12}}{K^{22}}\theta \qquad (27)$$

Подставим (27) в выражение плотности потенциальной энергии (20):

$$\begin{aligned} U_V &= [2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\theta - 2K^{12}\frac{K^{12}}{K^{22}}\theta\theta + K^{22}\frac{K^{12}}{K^{22}}\frac{K^{12}}{K^{22}}\theta\theta]/2 = \\ &= [2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + (\lambda - \frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}})\theta\theta]/2 \end{aligned} \qquad (28)$$

Как видно из (28), модель среды с алгебраической пористостью отличается от модели классической среды (12) только величиной второго коэффициента Ламе или модуля объёмного сжатия. Вместо классических λ и $K^{11} = 2\mu/3 + \lambda$ среда с алгебраической пористостью содержит соответственно $\tilde{\lambda} = (\lambda - \frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}})$ и $\tilde{K}^{11} = (2\mu/3 + \lambda - \frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}})$

В соответствии с теоремой Сильвестра поврежденные пористостью модули $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{K}^{11}$ всегда положительны и меньше своих бездефектных классических аналогов λ и K^{11}.

Это свойство алгебраической пористости, с другой стороны, создает трудности в определении отдельно бездефектных классических модулей λ и K^{11}, и отдельно – модулей алгебраически пористой среды K^{12} и K^{22}.

2.3 Градиентная среда Тупина (бездефектная)

Пусть в (1),(6) равны нулю модули, определяющие дефектные свойства:

$$K^{12} = K^{22} = 0 \quad C^{12} = C^{22} = 0 \tag{29}$$

Тогда плотность потенциальной энергии приобретает вид:

$$U_V = (2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\theta + C^{11}\theta_{,k}\theta_{,k})/2 \tag{30}$$

Силовая модель, вытекающая из формул Грина, определяет не только полные напряжения, которые совпадают с классическими, но и моментные напряжения:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = \mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + \lambda R_{k,k}\delta_{ij},\ m_k^\theta = \frac{\partial U_V}{\partial \theta_{,k}} = C^{11}\theta_{,k} \tag{31}$$

Соответственно, в этой модели (31) появляется понятие полных σ_{ij} и классических напряжений s_{ij}:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + m_{k,k}^\theta \delta_{ij} \tag{32}$$

Вариационное уравнение (6) с учетом (29),(30) принимает вид:

$$\delta L = \int\limits_V [(s_{ij,j} + P_i^V)\delta R_i dV + \int\limits_F [(P_i^F - s_{ij}n_j)\delta R_i - m_k^\theta n_k \delta\theta]dF = 0 \tag{33}$$

Уравнения Эйлера в силовых факторах следует сразу из (33):

$$s_{ij,j} + P_i^V = 0 \tag{34}$$

Уравнения (34) переписываются в кинематических переменных с учетом (31):

$$\mu(R_{i,j} - R_{j,i})_{,j} + (2\mu + \lambda)R_{k,ki} - C^{11}\Delta R_{k,ki} + P_i^V = 0 \tag{35}$$

Аналогично граничные условия в силовых факторах уют из (33) :

$$\int_F (P_i^F - s_{ij} n_j)\delta R_i dF = 0 \quad \int_F m_k^\theta n_k \delta\theta dF = 0 \qquad (36)$$

и переписываются в кинематических переменных с учетом (31):

$$\int_F \{P_i^F - [\mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + \lambda\theta\delta_{ij} - C^{11}\Delta\theta\delta_{ij}]n_j\}\delta R_i dF = 0, \int_F C^{11}\theta_{,k} n_k \delta\theta dF = 0 \qquad (37)$$

Математическая модель среды в этом случае определяется равенствами (29)-(37).

2.4 Градиентная среда Миндлина (среда с полями дефектов)

Пусть в (1), (6) равны нулю следующие неклассические модули:

$$C^{11} = C^{12} = 0 \qquad (38)$$

Плотность потенциальной энергии приобретает вид:

$$U_V = (2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + K^{11}\theta\theta + 2K^{12}\theta\varphi + K^{22}\varphi\varphi + C^{22}\varphi_{,k}\varphi_{,k})/2 \qquad (39)$$

Силовая модель, вытекающая из формул Грина, определяет не только напряжения, но и моментные напряжения, которые в отличие от моментных напряжений теории Тупина, зависят не от градиентов совместного изменения объёма, а от градиентов несовместного изменения объёма (пористости):

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = \mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda\theta + K^{12}\varphi)\delta_{ij},\ \sigma^\varphi = \frac{\partial U_V}{\partial \varphi} = K^{12}\theta + K^{22}\varphi, m_k^\varphi = \frac{\partial U_V}{\partial \varphi_{,k}} = C^{22}\varphi_{,k} \quad (40)$$

Запишем последовательно вариационное уравнение:

$$\delta L = \int_V [(\sigma_{ij,j} + P_i^V)\delta R_i + (m_{k,k}^\varphi - \sigma^\varphi)\delta\varphi]dV + \int_F [(P_i^F - \sigma_{ij}n_j)\delta R_i - m_k^\varphi n_k \delta\varphi]dF = 0 \quad (41)$$

уравнения Эйлера в силовых факторах (следует из (41)):

$$\sigma_{ij,j} + P_i^V = 0,\ m_{k,k}^\varphi - \sigma^\varphi = 0 \qquad (42)$$

уравнения Эйлера в кинематических переменных, полученные с учетом (40):

$$\mu(R_{i,j}-R_{j,i})_{,j}+(2\mu+\lambda)R_{k,ki}+K^{12}\varphi_{,i}+P_i^V=0,\ C^{22}\Delta\varphi-K^{22}\varphi=K^{12}\theta \qquad (43)$$

граничные условия в силовых факторах:

$$\int_F (P_i^F-\sigma_{ij}n_j)\delta R_i dF=0;\ \int_F m_k^{\varphi}n_k\delta\varphi dF=0 \qquad (44)$$

переписанные с учетом (40 в кинематических переменных:

$$\int_F \{P_i^F-[\mu(R_{i,j}+R_{j,i})+\lambda\theta\delta_{ij}+K^{12}\varphi\delta_{ij}]n_j\}\delta R_i dF=0;\ \int_F C^{22}\varphi_{,k}n_k\delta\varphi dF=0 \qquad (45)$$

Математическая модель определяется равенствами (38)-(45). Обратим внимание на то, что взаимодействие совместного и несовместного изменения объёма в модели Миндлина имеет место только в неградиентной части, за счет билинейного слагаемого в (39) с модулем K^{12}. В случае, когда и модуль K^{12} равен нулю, уравнения равновесия и пористости разделяются. При этом краевая задача на пористость оказывается однородной и приводит к тривиальному решению. В этом видится недостаток модели Миндлина.

3. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПЛАСТИН (ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ) 3.1 «Некорректный»- традиционный вариант.

Построим вариационные модели теории изгиба стержней (пластин) на основе кинематических гипотез, аналогичным гипотезам Бернулли и Тимошенко.

Обычно в прикладной теории стержней нужно положить коэффициент Пуассона равным 0. Мы будет рассматривать теорию стержней как частный случай теории изгиба пластин. (цилиндрический изгиб). В этом случае учитывается коэффициент Пуассона. Полученный подход позволяет получить теорию стержней, достаточно положить $2\mu + \lambda = E$. Пусть x это продольная координата, а z это координата в направлении толщины платины.

Постулируем кинематическую модель в виде:

$$u(x,z) = u_1(x)z, w(x,z) = w_0(x), \ \varphi(x,z) = \varphi_1(x)z \tag{46}$$

Производные от перемещений и пористости с учетом (46) запишутся в следующем виде:

$$\begin{array}{llll} u(x,z) = u_1 z & w(x,z) = w_0 & \varphi(x,z) = \varphi_1 z & \theta = u_{,x} + w_{,z} = u_1' z \\ \begin{cases} u_{,x}(x,z) = u_1' z \\ u_{,z}(x,z) = u_1 \end{cases} & \begin{cases} w_{,x}(x,z) = w_0' + w_2' y^2 \\ w_{,z}(x,z) = 0 \end{cases} & \begin{cases} \varphi_{,x}(x,z) = \varphi_1' z \\ \varphi_{,z}(x,z) = \varphi_1 \end{cases} & \end{array} \tag{47}$$

Отметим, что в общем случае представленные гипотезы (47) являются более общими чем гипотезы Бернулли и Тимошенко (теории стержней), в которых принимается деформация сдвига равно $\varepsilon_z = 0$.

Из общей постановки теории пористых сред можно определить силовые факторы как формулы Грина (см раздел 2):

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \dfrac{\partial U^V}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda\theta + K^{12}\varphi)\delta_{ij} \\ m = \dfrac{\partial U^V}{\partial \varphi} = (K^{12}\theta + K^{22}\varphi) \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_k = \dfrac{\partial U^V}{\partial \theta_{,k}} = C^{11}\theta_{,k} + C^{12}\varphi_{,k} \\ m_k = \dfrac{\partial U^V}{\partial \varphi_{,k}} = C^{12}\theta_{,k} + C^{22}\varphi_{,k} \end{cases} \tag{48}$$

С учетом кинематических гипотез (46) и (47), (48) силовые факторы имеют следующий вид разложения:

$$\sigma_{xx} = [(2\mu + \lambda)u_1' + K^{12}\varphi_1]z, \ \sigma_{xz} = \mu(u_1 + w_0'), \ \sigma_{zz} = [\lambda u_1' + K^{12}\varphi_1]z, \ \theta_{,z} = u_1', \ \varphi_{,z} = \varphi_1 \tag{49}$$

Получим выражение работы внешних сил с учетом (46):

$$A = \int_0^l [P_{x1}u_1 + P_{z0}w_0]dx + [M_1 u_1 + Q_0 w_0]|_0^l \tag{50}$$

где P_{x1}, P_{z0}, M_1, Q_0-заданные силовые факторы, которые имеют ясный физический смысл. P_{x1}, P_{z0}-усилия распределенные по длине балки, совершающие работу на $u_1 w_0$. M_1, Q_0 момент и перерезывающая сила заданные на торцах балки (пластины).

Дадим определения характерным длинам масштабных эффектов следующим образом:

Запишем вариацию лагранжиана (6) с учетом (46), (47) и (49). Получим в результате, после подстановки и интегрирования по толщине:

$$\begin{aligned}
\delta L = &\int_0^l [P_{x1}\delta u_1 + P_{z0}\delta w_0]dx + [M_1\delta u_1 + Q_0\delta w_0]|_0^l - \\
-&\int_0^l [(K^{12}Ju_1' + K^{22}J\varphi_1)\delta\varphi_1 + (\frac{C^{12}h^3}{12}u_1'' + \frac{C^{22}h^3}{12}\varphi_1')\delta\varphi_1' + \mu h(u_1 + w_0')\delta u_1 + \\
&+(EJu_1' + K^{12}J\varphi_1)\delta u_1' + (\frac{C^{11}h^3}{12}u_1'' + \frac{C^{12}h^3}{12}\varphi_1')\delta u_1'' + \mu h(u_1 + w_0')\delta w_0']dx
\end{aligned} \qquad (51а)$$

где, J -момент инерции, μ -модуль сдвига

$$C^{11} = \frac{(2\mu+\lambda)}{12}l_{11}^2,\ C^{12} = \frac{K^{12}}{12}l_{12}^2,\ C^{22} = \frac{K^{22}}{12}l_{22}^2 \qquad (51б)$$

$$\begin{aligned}
EJ &= \int_{-h/2}^{+h/2} ((2\mu+\lambda)z^2 + C^{11})dz = (2\mu+\lambda)h^3/12 + C^{11}h = \frac{(2\mu+\lambda)h^3}{12}(1+\frac{l_{11}^2}{h^2}) \\
K^{12}J &= \int_{-h/2}^{+h/2} (K^{12}z^2 + C^{12})dz = K^{12}h^3/12 + C^{12}h = \frac{K^{12}h^3}{12}(1+\frac{l_{12}^2}{h^2}) \\
K^{22}J &= \int_{-h/2}^{+h/2} (K^{22}z^2 + C^{22})dz = K^{22}h^3/12 + C^{22}h = \frac{K^{22}h^3}{12}(1+\frac{l_{22}^2}{h^2})
\end{aligned} \qquad (51с)$$

Равенствами (51б) - (51с) даются определения характерным длинам масштабных эффектов и соответствующим параметрам модели через них

Уравнения равновесия и статические граничные условия получаются из (51) после интегрирования по частям и приравнивания нулю множителей при вариации перемещений и пористости $\delta w_0, \delta u_1, \delta\varphi_1$ равными нулю

Например, уравнения равновесия имеет вид:

$$\begin{cases} \mu h(u_1' + w_0'') + P_{z0} = 0 \\ -\mu h(u_1 + w_0') + EJu_1'' - \dfrac{C^{11}h^3}{12}u_1'''' + K^{12}J\varphi_1' - \dfrac{C^{12}h^3}{12}\varphi_1''' + P_{x1} = 0 \\ \dfrac{C^{12}h^3}{12}u_1''' - K^{12}Ju_1' + \dfrac{C^{22}h^3}{12}\varphi_1'' - K^{22}J\varphi_1 = 0 \end{cases} \qquad (52)$$

Первое уравнение (52) интегрируется в квадратурах:

$$u_1 = -w_0' + \frac{1}{\mu h}[Q(0) - \int_0^x P_{z0}dx] \qquad (53)$$

Получим, что фактически, (53) является формулировкой гипотезы Кирхгоффа, если пренебречь внешними нагрузками.

В уравнении (52) можно последовательно исключить u_1, φ_1 и получить уравнение для прогибов.

$$\frac{(C^{11}C^{22} - C^{12}C^{12})h^6}{144}w_0'''''' -$$
$$-[C^{22}(EJ) - 2C^{12}(K^{12}J) + C^{11}(K^{22}J)]\frac{h^3}{12}w_0'''' +$$
$$+((EJ)(K^{22}J) - (K^{12}J)^2)w_0'' =$$
$$= -M_1(0)(K^{22}J)$$

где

$$\begin{aligned} EJ &= \int_{-h/2}^{+h/2} ((2\mu + \lambda)z^2 + C^{11})dz = (2\mu + \lambda)h^3/12 + C^{11}h = \frac{(2\mu + \lambda)h^3}{12}(1 + \frac{l_{11}^2}{h^2}) \\ K^{12}J &= \int_{-h/2}^{+h/2} (K^{12}z^2 + C^{12})dz = K^{12}h^3/12 + C^{12}h = \frac{K^{12}h^3}{12}(1 + \frac{l_{12}^2}{h^2}) \qquad (54) \\ K^{22}J &= \int_{-h/2}^{+h/2} (K^{22}z^2 + C^{22})dz = K^{22}h^3/12 + C^{22}h = \frac{K^{22}h^3}{12}(1 + \frac{l_{22}^2}{h^2}) \end{aligned}$$

Отметим, что в классическом случае теории пластин уравнения изгиба для кривизн записывается в следующем виде $EJw_0'' = -M$. Не трудно видеть (51с), что в приведенной теории стержней цилиндрическая жесткость при второй производной w_0'' модифицирована слагаемым и имеет вид $EJ - \frac{(K^{12})^2}{K^{22}} J$.

В результате эта жесткость неограниченно возрастает при $h \to 0$ и фиксированных масштабных параметрах, что не является физичным и относится нами к так называемых некорректным теориям стержней, для которых цилиндрическая жесткость бесконечно возрастает.

Используя определения изгибных жесткостей (54), окончательно получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{144}[l_{11}^2 l_{22}^2 - \frac{K^{12}K^{12}}{(2\mu+\lambda)K^{22}} l_{12}^2 l_{12}^2]w_0'''''' - \\
&-\frac{1}{12}[l_{22}^2(1+\frac{l_{11}^2}{h^2}) + l_{11}^2(1+\frac{l_{22}^2}{h^2}) - 2\frac{K^{12}K^{12}}{(2\mu+\lambda)K^{22}} l_{12}^2(1+\frac{l_{12}^2}{h^2})]w_0'''' + \\
&+[(1+\frac{l_{11}^2}{h^2})(1+\frac{l_{22}^2}{h^2}) - \frac{K^{12}K^{12}}{(2\mu+\lambda)K^{22}}(1+\frac{l_{12}^2}{h^2})(1+\frac{l_{12}^2}{h^2})]w_0'' = \\
&= -\frac{M_1(0)}{(2\mu+\lambda)h^3/12}(1+\frac{l_{22}^2}{h^2})
\end{aligned} \tag{55}$$

Из (55) видно, что в «плохом» некорректном варианте пористой пластины предельный случай не дает классической теории упругости.

Пусть $\frac{K^{12}K^{12}}{(2\mu+\lambda)K^{22}} = 1$ *и* $\frac{l_{12}^2 l_{12}^2}{l_{11}^2 l_{22}^2} = 1$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{12}[\frac{1}{l_{11}^2} + \frac{1}{l_{22}^2} - \frac{2}{l_{12}^2}]w_0'''' + \\
&+[(\frac{1}{l_{11}^2} + \frac{1}{h^2})(\frac{1}{l_{22}^2} + \frac{1}{h^2}) - (\frac{1}{l_{12}^2} + \frac{1}{h^2})^2]w_0'' = \\
&= -\frac{M_1(0)}{(2\mu+\lambda)h^3/12}\frac{1}{l_{11}^2 l_{22}^2}(1+\frac{l_{22}^2}{h^2})
\end{aligned} \tag{56}$$

3.2. Корректный вариант теории изгиба тонких структур (обобщенная теория пористых сред)

В соответствии с общей постановкой (6), (46), (47) запишем вариацию функционала:

$$
\begin{aligned}
&\delta L = \int_V P_i^V \delta R_i dV + \int_F \{P_i^F \delta R_i - (C^{11}\theta_{,x} + C^{12}\varphi_{,x}) n_x \delta\theta\} dF - \\
&-\int_V \{[(2\mu+\lambda)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{zz} + K^{12}\varphi - C^{11}\theta_{,xx} - C^{12}\varphi_{,xx}]\delta\varepsilon_{xx} + \\
&+\mu\varepsilon_{xz}(\underline{\delta u_{,z}} + \delta w_{,x}) + \\
&+[\lambda\varepsilon_{xx} + (2\mu+\lambda)\varepsilon_{zz} + K^{12}\varphi - (C^{11}\theta_{,xx} + C^{12}\varphi_{,xx})]\underline{\delta w_{,z}} + \\
&+(C^{11}\theta_{,z} + C^{12}\varphi_{,z})\underline{\delta\theta}_{,z} + \\
&+(K^{12}\theta + K^{22}\varphi)\delta\varphi + (C^{12}\theta_{,x} + C^{22}\varphi_{,x})\delta\varphi_{,x} + (C^{12}\theta_{,z} + C^{22}\varphi_{,z})\underline{\delta\varphi_{,z}}\} dV
\end{aligned}
\tag{57}
$$

При вариациях подчеркнутых переменных стоят статические факторы, которые после интегрирования по частям по поперечной координате переходят в соответствующие силовые факторы, определенные на верхней и нижней поверхностях стержня.

В соответствии с гипотезой Ландау, для тонкостенных конструкций силовые факторы, обращающиеся в ноль на поверхности тонкостенной конструкции, малы и внутри конструкции. Поэтому слагаемые содержащие подчеркнутые вариации мы полагаем равными нулю.

$$
\begin{aligned}
&\delta L = \int_0^l \{\mu h w'' + [-(2\mu+\lambda)w'''' + C^{11}w'''''' + K^{12}\varphi'' - C^{12}\varphi'''']J + (q + p')\}\delta w dx - \\
&+\int_0^l (K^{12}w'' - C^{12}w'''' - K^{22}\varphi + C^{22}\varphi'')J\delta\varphi dx + \\
&+\{Q - p - \mu h w' - [-(2\mu+\lambda)w''' + C^{11}w''''' + K^{12}\varphi' - C^{12}\varphi''']J\}\delta w|_{x=0}^{x=l} - \\
&-\{M - [-(2\mu+\lambda)w'' + C^{11}w'''' + K^{12}\varphi - C^{12}\varphi'']J\}\delta w'|_{x=0}^{x=l} + \\
&+(C^{11}w''' - C^{12}\varphi')J\delta w''|_{x=0}^{x=l} + \\
&+(C^{12}w''' - C^{22}\varphi')J\delta\varphi|_{x=0}^{x=l} = 0
\end{aligned}
\tag{58}
$$

При этом при получении (58) использовались кинематические соотношения обобщающих гипотез Кирхгоффа для градиентной пористой среды:

$$u(x,z)=-w_0'(x)z, w(x,z)=w_0(x), \theta_{,z}(x,z)=-w_0''(x), \varphi_{,z}=\varphi_1(x)$$

и использовались следующие обозначения для силовых факторов

$$[\int\limits_{-h/2}^{+h/2} P_x^V zdz+(P_x^F z)|_{y=-h/2}^{y=+h/2}]=p,\ [\int\limits_{-h/2}^{+h/2} P_z^V dz+P_z^F\ |_{y=-h/2}^{y=+h/2}]=q,\ \int\limits_{-h/2}^{+h/2} P_x^F zdz=M,\ \int\limits_{-h/2}^{+h/2} P_z^F dz=Q$$

В результате, вариационным равенством (58) определяется корректная математическая постановка теории стержней постановка для обобщенных пористых сред, где учитывается и дефектность, и пористость с характеристикой пористости φ и градиентность θ характеризуемая модулями $C^{ij}, i.j=1,2$.

Запишем уравнение Эйлера

$$\begin{cases}-\mu hw''+(2\mu+\lambda)Jw''''-C^{11}Jw''''''-K^{12}J\varphi''+C^{12}J\varphi''''=(q+p') \\ K^{12}w''-C^{12}w''''-K^{22}\varphi+C^{22}\varphi''=0\end{cases} \tag{59}$$

Уравнения (59) описывают поведение стрежней связной градиентной постановки дефектной пористой среды. Первое уравнение относится к уравнению изгиба стержня, второе к уравнению пористости. Отметим, что в отличии от классической теории стержней, в этой теории учитывается средняя деформация сдвига (по типу Тимошенко).

Спектр граничных условий, следует из (58) и определяется четырьмя парами альтернативных граничных условий на торцевых кромках:

$$\begin{aligned}&\{Q-p-\mu hw'+(2\mu+\lambda)Jw'''-C^{11}Jw'''''-K^{12}J\varphi'+C^{12}J\varphi'''\}\delta w\,|_{x=0}^{x=l}=0\\&\{M-[-(2\mu+\lambda)w''+C^{11}w''''+K^{12}\varphi-C^{12}\varphi'']J\}\delta w'\,|_{x=0}^{x=l}=0\\&(-C^{11}w'''+C^{12}\varphi')\delta w''\,|_{x=0}^{x=l}=0\\&(-C^{12}w'''+C^{22}\varphi')\delta\varphi\,|_{x=0}^{x=l}=0\end{aligned} \tag{60}$$

Математическая постановка обобщенной теории пластин (стержней) дается уравнениями (60).

Исключим из первого уравнения системы (59)-(60) φ''' с помощью второго уравнения системы. Полагаем для простоты погонные внешние нагрузки равными нулю: $p=0\,;q=0$.

$$-\frac{\mu h}{J}w''+(2\mu+\lambda-K^{12}\frac{C^{12}}{C^{22}})w''''-(C^{11}-\frac{C^{12}C^{12}}{C^{22}})w''''''-(K^{12}-K^{22}\frac{C^{12}}{C^{22}})\varphi''=0 \qquad (61)$$

Теория стержней, полученная в результате, формально описывается уравнением (61) из которого нужно исключить первое слагаемое, чтобы получить теорию стержней Бернулли – без учета сдвига. Мы видим, что модуль при 4-й производной определяется поврежденным модулем упругости и не модифицируется за счет масштабных параметров. Т.е. данная теория является корректной. Чтобы получить теорию пластин (стержней) в рамках модели Бернулли следует в выражении (57) исключить слагаемое $\mu\varepsilon_{xz}(\delta u_{,z}+\delta w_{,x})$ целиком, считая, что деформация сдвига равна 0. Для варианта теории Бернулли вариационное равенство имеет вид

$$\begin{aligned}
&\delta L=\int_0^l \{[-(2\mu+\lambda)w''''+C^{11}w''''''+K^{12}\varphi''-C^{12}\varphi'''']J+(q+p')\}\delta w dx+\\
&+\int_0^l (K^{12}w''-C^{12}w''''-K^{22}\varphi+C^{22}\varphi'')J\delta\varphi dx+\\
&+\{Q-p-[-(2\mu+\lambda)w'''+C^{11}w'''''+K^{12}\varphi'-C^{12}\varphi''']J\}\delta w|_{x=0}^{x=l}-\\
&-\{M-[-(2\mu+\lambda)w''+C^{11}w''''+K^{12}\varphi-C^{12}\varphi'']J\}\delta w'|_{x=0}^{x=l}+\\
&+(C^{11}w'''-C^{12}\varphi')J\delta w''|_{x=0}^{x=l}+\\
&+(C^{12}w'''-C^{22}\varphi')J\delta\varphi|_{x=0}^{x=l}=0
\end{aligned} \qquad (62)$$

а уравнения Эйлера имеют соответствующий вид:

$$
\begin{cases}
(2\mu+\lambda)w'''' - C^{11}w'''''' - K^{12}\varphi'' + C^{12}\varphi'''' = (q+p')/J \\
K^{12}w'' - C^{12}w'''' - K^{22}\varphi + C^{22}\varphi'' = 0
\end{cases}
\tag{63}
$$

Вариационная постановка (62) с уравнениями Эйлера (63) дает корректный вариант обобщенной теории стержней Бернулли

Заключение

Построены вариационные модели тонких структур стержней (пластин), в которых изгибная жесткость (слагаемое при 4 производной) в уравнениях равновесия не модифицируется за счет масштабных параметров, и не содержит сингулярности при толщине стремящееся к нулю.

Предложенная модель демонстрирует преимущества перед аналогами:

1. В отличие от теории Тупина, учитывает несовместные деформации, связанные с пористостью.

2. По сравнению с моделью Миндлина, исключает тривиализацию краевых задач за счет билинейных слагаемых.

3. Корректные вариационные постановки для изгиба пластин исключают сингулярности, характерные для «некорректных» теорий.

4. Модель согласуется с экспериментальными данными по масштабным эффектам в композитных материалах [13-18].

Результаты открывают возможности для проектирования легких и прочных конструкций в авиакосмической отрасли, где учет микроструктуры критичен.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на экспериментальную верификацию моделей, учёт нелинейных эффектов и разработку численных методов для решения сложных краевых задач.

Список источников

1. Cowin S.C., Nunziato J.W. Linear elastic materials with voids // Journal of Elasticity. 1983. No. 13. P. 125–147. DOI: 10.1007/BF00041230

2. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. V. 16, P. 51-78. URL: https://doi.org/10.1007/BF00248490

3. Belov P.A., Lurie S.A. A continuum model of microheterogeneous media // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2009. No. 73 (5). P. 599–608. URL: https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.11.013

4. Шалимов А.С., Ташкинов М.А. Моделирование деформирования и разрушения пористых сред с учетом особенностей их морфологического строения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 4. С. 175-187. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.15

5. Eremeyev V.A. On effective properties of materials at micro- and nano-scale // Mechanics Research Communications. 2018. No. 93. P. 47–53. DOI: 10.1007/978-3-319-21494-8_3

6. Сердюк Д.О. Фундаментальные решения нестационарной динамики анизотропной цилиндрической оболочки Тимошенко // Труды МАИ. 2024. № 139. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=183453

7. Прокудин О.А., Соляев Ю.О., Бабайцев А.В., Артемьев А.В., Коробков М.А. Динамические характеристики трехслойных балок с несущими слоями из алюмостеклопластика // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 4. С. 260-270. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.22

8. Мартиросов М.И., Хомченко А.В. Расчётно-экспериментальное исследование поведения плоской подкреплённой панели из углепластика при ударе // Труды МАИ. 2022. № 126. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=168990. DOI: 10.34759/trd-2022-126-04

9. Калягин М.Ю. Моделирование приборных отсеков летательных аппаратов пористо-смесевыми ударниками // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=90156

10. Дудченко А.А., Башаров Е.А. Исследование упругой линии трехслойной балки с существенно различающейся слоевой жесткостью // Труды МАИ. 2011. № 42. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=24261

11. Ташкинов М.А., Шалимов А.С. Моделирование влияния микромасштабных морфологических параметров на деформационное поведение пористых материалов с металлической матрицей // Физическая мезомеханика. 2021. № 5. С. 130-137. DOI: 10.24412/1683-805X-2021-5-130-137

12. Нгуен Н.Х., Тарлаковский Д.В. Нестационарные поверхностные функции влияния для упруго-пористой полуплоскости // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=29269

13. Лурье С.А., Шрамко К.К. Об условии корректности в краевых задачах градиентных теорий упругости // Труды МАИ. 2021. № 120. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=161414. DOI: 10.34759/trd-2021-120-02

14. Бабайцев А.В., Бурцев А.Ю., Рабинский Л.Н., Соляев Ю.О. Методика приближенной оценки напряжений в толстостенной осесимметричной композитной конструкции // Труды МАИ. 2019. № 107. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=107879

15. Solyaev Y., Babaytsev A. Direct observation of plastic shear strain concentration in the thick GLARE laminates under bending loading // Composites Part B: Engineering. 2021. V. 224, P. 109145. DOI: 10.1016/j.compositesb.2021.109145

16. Gusev A.A., Lurie S.A. Symmetry conditions in strain gradient elasticity // Mathematics and Mechanics of Solids. 2017. No. 22 (4). P. 683-691. DOI: 10.1177/1081286515606960

17. Lurie S.A. et al. Dilatation gradient elasticity theory // European Journal of Mechanics-A/Solids. 2021. V. 88, P. 104258. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2021.104258

18. Лурье С.А., Дудченко А.А., Нгуен Д.К. Градиентная модель термоупругости для слоистой композитной структуры // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=49674

19. Solyaev Y., Lurie S., Korolenko V. Three-phase model of particulate composites in second gradient elasticity // European Journal of Mechanics-A/Solids. 2019. V. 78, P. 103853. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2019.103853

20. Васильев В.В., Лурье С.А., Салов В.А. Исследование прочности пластин с трещинами на основе критерия максимальных напряжений в масштабно-зависимой

обобщенной теории упругости // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21. № 4. С. 5-12. DOI: 10.24411/1683-805X-2018-14001

References

1. Cowin S.C., Nunziato J.W. Linear elastic materials with voids. *Journal of Elasticity*. 1983. No. 13. P. 125–147. DOI: 10.1007/BF00041230

2. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. V. 16, P. 51-78. URL: https://doi.org/10.1007/BF00248490

3. Belov P.A., Lurie S.A. A continuum model of microheterogeneous media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2009. No. 73 (5). P. 599–608. URL: https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.11.013

4. Shalimov A.S., Tashkinov M.A. Modeling of deformation and fracture of porous media taking into account their morphological composition. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*. 2020. No. 4. P. 175-187. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.15

5. Eremeyev V.A. On effective properties of materials at micro- and nano-scale. *Mechanics Research Communications*. 2018. No. 93. P. 47–53. DOI: 10.1007/978-3-319-21494-8_3

6. Serdyuk D.O. Fundamental solutions to the transient dynamics of an anisotropic cylindrical Timoshenko shell. *Trudy MAI.* 2024. No. 139. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=183453

7. Prokudin O.A., Solyaev Yu.O., Babaitsev A.V., Artem'ev A.V., Korobkov M.A. Dynamic characteristics of three-layer beams with load-bearing layers made of alumino-

glass plastic. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*. 2020. No. 4. P. 260-270. (In Russ.). DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.22

8. Martirosov M.I., Khomchenko A.V. Computational and experimental study of the behavior of a flat reinforced carbon fiber panel on impact. *Trudy MAI*. 2022. No. 126. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168990. DOI: 10.34759/trd-2022-126-04

9. Kalyagin M.Yu. Modeling of aerial vehicles instrument bays by porous-composite impactors. *Trudy MAI*. 2018. No. 98. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=90156

10. Dudchenko A.A., Basharov E.A. Determination heating in layers of the rubber multilayer beem of the type torsion under cycle loading. *Trudy MAI*. 2011. No. 42. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=24261

11. Tashkinov M.A., Shalimov A.S. Modeling of the effect of microscale morphological parameters on the deformation behavior of porous materials with a metal matrix. *Fizicheskaya mezomekhanika*. 2021. No. 5. P. 130-137. (In Russ.). DOI: 10.24412/1683-805X-2021-5-130-137

12. Nguen N.Kh., Tarlakovskii D.V. The unsteady influence-functions for the study of above the surface in a porous elastic half-plane object. *Trudy MAI*. 2012. No. 53. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29269

13. Lur'e S.A., Shramko K.K. On the correctness condition in boundary value problems of gradient elasticity theory. *Trudy MAI*. 2021. No. 120. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=161414. DOI: 10.34759/trd-2021-120-02

14. Babaitsev A.V., Burtsev A.Yu., Rabinskii L.N., Solyaev Yu.O. A technique for approximate stresses evaluation in a thick-wall composite axisymmetric structure. *Trudy MAI*. 2019. No. 107. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=107879

15. Solyaev Y., Babaytsev A. Direct observation of plastic shear strain concentration in the thick GLARE laminates under bending loading. *Composites Part B: Engineering*. 2021. V. 224, P. 109145. DOI: 10.1016/j.compositesb.2021.109145

16. Gusev A.A., Lurie S.A. Symmetry conditions in strain gradient elasticity. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2017. No. 22 (4). P. 683-691. DOI: 10.1177/1081286515606960

17. Lurie S.A. et al. Dilatation gradient elasticity theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2021. V. 88, P. 104258. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2021.104258

18. Lur'e S.A., Dudchenko A.A., Nguen D.K. Gradient model of termoelasticity for laminated composite structures. *Trudy MAI*. 2014. No. 75. (In Russ.). URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49674

19. Solyaev Y., Lurie S., Korolenko V. Three-phase model of particulate composites in second gradient elasticity. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2019. V. 78, P. 103853. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2019.103853

20. Vasil'ev V.V., Lur'e S.A., Salov V.A. Estimation of the strength of plates with cracks based on the maximum stress criterion in a scale-dependent generalized theory of elasticity. *Fizicheskaya mezomekhanika*. 2018. V. 21, No. 4. P. 5-12. (In Russ.). DOI: 10.24411/1683-805X-2018-14001

Статья поступила в редакцию. 27.04.2025

Одобрена после рецензирования 05.05.2025

Принята к публикации 25.06.2025

The article was submitted on 27.04.2025; approved after reviewing on 05.05.2025; accepted for publication on 25.06.2025